47

Ma-
47
2

Die reine und angewandte Elementar-Mathematik.

Ein vollständiges Lehrbuch zum Selbstunterrichte und zum Gebrauche bey Vorlesungen in Civil- und Militärschulen, eingerichtet und verfaßt

von
Joseph Schmölzl,
Lieutenant im königl. bayerischen 2ten Artillerie-Regimente, dermalen bey der königl. Zeughaus-Hauptdirektion zu München als Mitglied einer allerhöchst angeordneten Artillerie-Commission kommandirt.

II. Theil.
Die Elementar-Geometrie.

München 1831.
In Commission der Buchhandlung von Georg Franz.
Gedruckt bey Franz Xav. Auer.

Die

reine und angewandte

Elementar=Geometrie.

Ein

vollständiges Lehrbuch

zum

Selbstunterrichte

und

zum Gebrauche bey

Vorlesungen in Civil= und Militärschulen,

eingerichtet und verfaßt

von

Joseph Schmölzl,

Lieutenant im königl. bayerischen 2ten Artillerie=Regimente, dermalen bey der königl. Zeughaus=Hauptdirektion zu München als Mitglied einer allerhöchst angeordneten Artillerie=Commission kommandirt.

Mit IV Steintafeln.

BIBLIOTHEK DES K·B·INFANT·
REGIMENTS ERBGROSSHERZOG
VON HESSEN.

München 1831.

In Commission der Buchhandlung von Georg Franz.

Gedruckt bey Franz Xav. Auer.

Nur Beharrung führt zum Ziel;
Nur die Fülle führt zur Klarheit,
Und im Abgrund wohnt die Wahrheit.

Schiller.

Seiner Königlichen Hoheit

dem

Durchlauchtigsten Fürsten und Herrn

W i l h e l m

Herzog in Bayern 2c.

Großmeister des königlich-bayerischen Haus-Ritter-Ordens zum heiligen Michael, königlich-bayerischer General der Infanterie 2c.

als Zeichen tiefster Ehrfurcht gewidmet

von

dem Verfasser.

Vorrede.

Es geschah wider den Willen des Verfassers, daß das Erscheinen dieses zweyten Theiles der Elementar-Mathematik verzögert wurde. Die gegenwärtige politische Lage Europas, welche auch Bayern zu Kriegsrüstungen zwang, wird den Verfasser als Militärsmann deßfalls rechtfertigen, da er zumal als Mitglied einer, von Seiner Majestät des Königs angeordneten Kommission zur Verfassung einer Vorschrift über die Ernstfeuerwerkerey für die königl. Artillerie so sehr für Dienstgeschäfte in Anspruch genommen wurde, daß wirklich eine geraume Zeit im Drucke ausgesetzt werden mußte.

Dieser Theil ist die unmittelbare Fortsetzung der Elementar-Arithmetik, und der nothwendige Uebergang zur Trigonometrie.

Den Ansichten des Verfassers gemäß, wofür im ersten Theile die Gründe auseinander gesetzt wurden, sollen erst in diesem Theile jene streng logischen Ausscheidungen im Vortrage geschehen, welche der Mathematik als Vernunftwissenschaft zukommen, wenn anders ein solches Lehrbuch nicht blos für schon mathematisch Gebildete, sondern auch für Anfänger bestimmt seyn soll. Diese in der Geometrie vorkommenden Ausscheidungen der verschiedenen Sätze sind folgende:

1) Grundsatz ist jener Satz, dessen Wahrheit an und für sich schon einleuchtend ist, und für andere Sätze zum Grunde gelegt wird.

2) Lehrsatz heißt ein Satz, dessen Wahrheit erst mittelst anderer Sätze dargelegt werden kann. Die Darlegung der Wahrheit heißt Beweis. Man nennt diesen direkt, wenn er unmittelbar aus anderen Sätzen abgeleitet werden kann; hingegen indirekt, wenn man die Wahrheit da-

durch darthut, daß man die Unmöglichkeit des Gegentheiles zeigt.

3) Thesis (Thesis, θεσις) ist jeder aufgestellte Satz, der unter gewissen Bedingungen wahr ist. Diese Bedingungen nennt man die Daten (Data). Man bezeichnet Thesis mit Th. nnd Data mit D. *)

4) Postulat (von postulo) oder Forderungssatz ist jener Grundsatz, welcher aus der construktionsfähigen Anschaulichkeit eines Gegenstandes — einer stetigen Größe — einleuchtet.

5) Aufgabe, Problem (Problema, πρόβλημα) ist ein Satz, welcher eine Ausführung fordert. Diese Ausführung geschieht erstens durch die Auflösung der Aufgabe, und zweytens durch den Beweis über die Richtigkeit der Auflösung,

*) Bey der Führung mathematischer Beweise wird die Thesis oben angesetzt, und darnach kommen die Daten. Letztere sind entweder schon als Bedingungen mit dem Lehrsatze gegeben, oder müssen bey Aufgaben erst durch Konstruktion für den Beweis angenommen werden.

d. h. eine jede Aufgabe erfordert eine Auflösung und einen Beweis.

6) Zusatz, Folgesatz endlich ist jeder Satz, dessen Richtigkeit aus andern als wahr anerkannten Sätzen geradezu folgt.

Ganz besondere Mühe hat man sich gegeben mit einer logischen Durchführung auch Einfachheit des Systems zu verbinden. Es ist dem Verfasser gelungen, die verschiedenen Ebenen — die Dreyecke, Vierecke und Vielecke — für sich getrennt zu betrachten, wodurch das Ganze an Ordnung und Uebersicht gewinnt. Auch hat der Verfasser eine strenge Scheidewand zwischen der Longimetrie und Planimetrie aufgestellt, indem zu ersterer jener Theil gerechnet wurde, in welchem absolut nur von Linien die Rede ist, und alle geometrischen Figuren in die Planimetrie gezählt wurden; denn eine geometrische Figur ist nach der Definition der Mathematiker eine von allen Seiten begränzte Fläche. — Auch hält der Verfasser die Benennung Figur für zu allgemein (denn man nennt jede bildliche Darstellung ja Figur), belegt daher alle geometrischen Größen, welche man bisher unter geometrischen Figuren in der Elemen-

tar-Geometrie verstand, mit dem richtigen Worte Ebene, und bildet aus denselben den Theil der Planimetrie.

Durch ein solches System hofft der Verfasser seinen Ansichten zu entsprechen.

Ganz seinen Ansichten zuwider ist es, den Umfang der Elementar-Mathematik dadurch zu vermindern, daß man sie für besondere Stände, oder für besondere Schulen und Lehranstalten in Schranken setzt. Gegenwärtiges Lehrbuch der Elementar-Mathematik ist für alle Stände, für alle Schulen und Lehranstalten. Es ist selbes die reichhaltige Quelle einer unendlichen Menge von Wahrheiten, welche sich über alle Gebiete des menschlichen Wissens ausbreitet.

Den Weg zu diesen Wahrheiten haben mir die königlichen wirklichen Herren Professoren, Anton Vestner *) und Dr. Reimund Unruh **) im

---

*) Der Verfasser des Lehrbuches: Anfangsgründe der mathematischen Analysis und der höhern Geometrie, vorzüglich zum Gebrauche für den Unterricht in Schulen. 1823.

**) Verfasser eines Lehrbuches der Geometrie nebst ihrer ausge-

Kadeten=Korps zu München durch den gründlichsten Unterricht gebahnt, wofür ich Ihnen öffentlich vor der Welt meinen innigsten Dank zolle.

Sollte gegenwärtiges Lehrbuch in dem Grade den Beyfall Sachverständiger ärndten, daß es wagen darf, sich den vortrefflichen Werken der genannten Meister nur entfernt zu nahen, so wird meine Mühe belohnt seyn, und mein Eifer verdoppelt werden.

München im August 1831.

Der Verfasser.

---

dehnten Anwendung auf die Lösung geometrischer Probleme. 1824. 2te Aufl. 1831.

So wie auch eines Lehrbuches der ebenen und sphärischen Trigonometrie, nebst einem Anhange trigonometrischer Aufgaben. 1826.

Inhalts-Anzeige.

Seite

Einleitung: Von der Geometrie im Allgemeinen . . 1

I. Abtheilung. Die reine Elementar-Geometrie.

I. Hauptstück: Die Longimetrie.

1ter Abschnitt: Die Linien an und für sich 7

2ter Abschnitt: Die Linien in ihrer Verbindung.

A. Die Winkeln 10

B. Die Parallellinien 15

II. Hauptstück: Die Planimetrie.

1ter Abschnitt: Vorkenntnisse 20

2ter Abschnitt: Die Ebenen an und für sich, und die Vergleichung derselben unter sich.

A. Die Dreyecke 23

B. Die Vierecke 47

C. Die Vielecke, Polygone 61

D. Der Kreis 69

3ter Abschnitt: Die Ebenen in Verbindung mit geraden Linien und unter sich.

A. Die Vergleichung der verschiedenen Ebenen 87

B. Die Lage gerader Linien gegen Ebenen . . 92

C. Die Lage der Ebenen gegeneinander . . . 98

Seite

III. Hauptstück: Die Stereometrie.

1ter Abschnitt: Vorkenntnisse 102

2ter Abschnitt: Die einfachen geometrischen Körper.

A. Das Prisma 108

B. Der Cylinder 124

C. Die Pyramide 128

D. Der Kegel 136

E. Die Kugel 142

II. Abtheilung. Die angewandte Elementar-Geometrie.

Von der Anwendung der Geometrie im Allgemeinen 157

I. Hauptstück: Die darstellende Elementar-Geometrie.

1ter Abschnitt: Die darstellende Geometrie im Allgemeinen 161

2ter Abschnitt: Die Darstellung der Geometrie durch Anwendung der geometrischen Sätze an und für sich 163

3ter Abschnitt: Die Darstellung der Geometrie durch Anwendung der geometrischen Sätze in Verbindung mit der Algebra 177

II. Hauptstück: Die geometrische Terrainaufnahme.

1ter Abschnitt: Vorkenntnisse 188

2ter Abschnitt: Die geometrische Terrainaufnahme mit Stäben 199

3ter Abschnitt: Die geometrische Terrainaufnahme mit dem Meßtische 210

Einleitung.

Von der Geometrie im Allgemeinen.

§. 1.

a) Erklärungen.

Die Wissenschaft der kontinuirlichen oder stetigen Größen heißt Geometrie. (Man sehe die Einleitung im ersten Theile).

§. 2.

Zeit und Raum sind stetige Größen. Da sich die Zeit aber nur nach einer einzigen Art, nehmlich nur in die Länge, ausdehnen kann, so beschäftiget sich die Geometrie nicht mit den zeitlich stetigen, sondern mit den Raum einnehmenden stetigen Größen; daher wird die Geometrie auch die Wissenschaft des Raumes genannt.

§. 3.

Die Ausdehnungen oder Dimensionen des Raumes sind von dreyerley Art; entweder nur allein in die Länge, oder in die Länge und Breite zugleich, oder endlich in die Länge, Breite und Höhe oder Tiefe.

Die Ausdehnung des Raumes nach Länge heißt eine geometrische Linie, jene nach Länge und Breite eine geometrische Fläche und jene nach Länge, Breite und Höhe oder Tiefe ein geometrischer Körper.

§. 4.

Das Aeußerste des Raumes nennt man dessen Gränzen.

Die Gränzen eines geometrischen Körpers sind geometrische Flächen, jene einer geometrischen Fläche geometrische Linien, und jene einer geometrischen Linie geometrische Punkte. Ein geometrischer Punkt ist nur ein gedachter Ort im Raume ohne alle Ausdehnung.

§. 5.

Ein geometrischer Körper besteht aber nicht aus Flächen, eben so wenig eine geometrische Fläche aus Linien, oder eine geometrische Linie aus Punkten; denn die Gränzen eines Dinges können nicht dessen Bestandtheile seyn, welch letztere immer kleinere gleichartige Dinge des Ganzen sind. Ein geometrischer Körper besteht demnach wieder aus kleinern Körpern, eine Fläche wieder aus kleinern Flächen, eine Linie wieder aus kleinern Linien.

§. 6.

Ein geometrischer Körper entsteht durch die Bewegung einer Fläche nach der dritten Dimension — entweder nach Tiefe oder Höhe — wenn man sich die Spuren der Bewegung vorgestellt denkt. Eine geometrische Fläche entsteht durch die Bewegung einer Linie nach der zweyten Dimension — nach Breite —, und eine geometrische Linie durch die Bewegung eines Punktes nach der Länge, indem man die Spuren der Bewegung als bezeichnet darstellt.

§. 7.

Ein Körper wird durch Flächen, eine Fläche durch Linien und eine Linie durch Punkte getheilt.

Die Vergleichung zweyer oder mehrerer geometrischen Größen miteinander geschieht durch die Vergleichung ihrer einzunehmenden Räume.

§. 8.

b) Lehrsatz.

Geometrische Größen, welche aufeinandergelegt, sich vollkommen decken, sind congruent.

Beweis: Wenn sich zwey geometrische Größen vollkommen decken, so müssen ihre Theile einerley Gestalt und Größe haben, und also nach der, in der Einleitung zur Arithmetik gegebenen Erklärung, congruent seyn.

Zusätze:

1) Congruente Größen decken sich demnach vollkommen, wenn man sie so aufeinander legt, daß ihre gleichliegenden Theile zusammen kommen.

2) Congruente Größen können ohne Veränderung für einander gesetzt werden.

3) Wenn zwey Größen einer dritten congruent sind, so sind selbe auch unter sich congruent. Z. B.

$$A \cong B$$
$$A \cong C$$

also auch $B \cong C$.

§. 9.

c) Eintheilung.

Nach der Eintheilung der stetigen Größen (§. 3) in Linien, Flächen und Körper zerfällt die Geometrie auch in 3 Theile, nehmlich in die Longimetrie (von longus und metrum), die Lehre von den Linien, in die Planimetrie, (von planus und metrum), die Lehre von den Flächen, und

in die Stereometrie (von στερεος und μετρον), die Lehre von den Körpern.

§. 10.

Gemäß der Eintheilung der Mathematik im Allgemeinen in reine und angewandte Mathematik (1ter Theil, Einleitung) wird auch die Elementar-Geometrie in die reine und angewandte Elementar-Geometrie geschieden; und es zerfällt demnach dieses Werk in diese beyden Abheilungen. —

I. Abtheilung.

Die

reine Elementar-Geometrie.

I. Hauptstück.

Die Longimetrie.

I. Abschnitt.

Die Linien an und für sich.

§. 11.

a) Erklärungen.

Die Longimetrie ist derjenige Theil der Geometrie, welcher von der Lage, Größe und Beschaffenheit der Linien handelt.

§. 12.

Eine Linie ist diejenige geometrische Größe, welche nur eine einzige Ausdehnung nach Länge hat. Man bezeichnet eine Linie durch die, an ihren Endpunkten stehenden Buchstaben.

Eine Linie heißt gerad (linea recta), wenn alle Theile derselben einerley Richtung haben, d. h. wenn sie durch die Bewegung eines Punktes nach einerley Richtung entstanden ist. Z. B. Fig. 1 ist AB eine gerade Linie. Hingegen krumm heißt eine Linie (linea curva), wenn keiner ihrer

Theile gerad ist, d. h. wenn sie durch die Bewegung eines Punktes nach verschiedenen Richtungen entstanden ist. Z. B. Fig. 2 ist CD eine krumme Linie. Und endlich heißt eine Linie gemischt, wenn ihre Theile theils gerad theils krumm sind. Fig. 3 ist EFG eine gemischte Linie.

Eine Kreislinie ist diejenige krumme Linie, welche entsteht, wenn man sich an einer geraden Linie einen der Endpunkte unbeweglich denkt, den andern aber so lang nach gleicher Richtung in stets gleichen Abständen um denselben herumbewegt, bis die gerade Linie wieder in ihre anfängliche Lage kömmt, und man sich die Spuren dieser Bewegung des einen Endpunktes als bezeichnet vorstellt. Fig. 58 BHADM.

Jeden beliebigen Theil einer Kreislinie nennt man überhaupt einen Kreisbogen. Beträgt derselbe die Hälfte der Kreislinie, so heißt er ins Besondere ein Halbkreis, ist er der vierte Theil, ein Quadrant, der sechste Theil, ein Sextant. Der 36ote Theil der Kreislinie heißt ein Grad, der 6ote eines Grades, eine Minute, und der 6ote einer Minute, eine Sekunde. Man bezeichnet Grade mit (°), Minuten mit ('), Sekunden mit ("), welche Zeichen man rechts oberhalb der dazu gehörigen Zahlen setzt.

Anmerkung: Nach der neuen französischen Centesimaleintheilung hat der Quadrant 100 Grade, der Grad 100 Minuten, und die Minute 100 Sekunden, also die ganze Kreislinie 400 Grade.

§. 13.

Wenn eine gerade Linie auf einer andern so aufsteht, daß erstere gegen letztere nach beyden Seiten zu gleiche Neigungen hat, wie z. B. Fig. 8 CD auf AB, so sagt man CD stehe senkrecht oder perpendiculär (perpendicularis) auf AB, und nennt sie gegenseitig senkrechte Linien.

§. 14.

b) Grundsätze.

1) Zwischen zwey gegebenen Punkten ist immer nur eine gerade Linie möglich.

2) Zwischen zwey gegebenen Punkten sind unendlich viele krumme und gemischte Linien möglich.

3) Zwischen zwey gegebenen Punkten ist unter allen möglichen Linien die gerade die kürzeste.

Zusätze:

1) Die Lage einer geraden Linie ist schon durch zwey Punkte bestimmt.

2) Die Größe einer geraden Linie ist durch ihre zwey Endpunkte bestimmt.

3) Zwey gerade Linien können sich nur in einem Punkte durchschneiden, d. h. sie haben einen Punkt miteinander gemein.

4) Durch einen jeden Punkt in einer geraden Linie ist nur eine Senkrechte möglich.

5) Ebenso ist auch von einem Punkte außerhalb einer Linie nur eine Senkrechte auf dieselbe möglich, und diese ist unter allen andern gezogenen Linien die kürzeste.

Anmerkung: Man versteht unter Entfernung eines Punktes von einer Linie allzeit die Senkrechte von ersterem auf letztere.

§. 15.

c) Postulat.

Man kann jede gegebene gerade Linie über ihre Gränzen hinaus ins Unendliche fort verlängern.

§. 16.

d) Lehrsatz.

Zwey oder mehrere gleich große gerade Linien sind congruent.

Beweis: Da die gegebenen geraden Linien gleich groß sind, so fallen ihre Endpunkte aufeinander, und da nach §. 14 zwischen zwey Punkten nur eine gerade Linie möglich ist, so decken sich die gegebenen Linien vollkommen, wenn man sie auf einander legt, und sind daher nach §. 8 congruent.

Zusatz: Es folgt demnach aus der Gleichheit zweyer geraden Linien schon deren Congruenz, weßhalb man sich auch bey denselben nie des Congruenzzeichens bedient. —

II. Abschnitt.

Die Linien in ihrer Verbindung.

A.

Die Winkeln.

§. 17.

a) Erklärungen.

Die Neigung oder Abweichung zweyer Linien gegen einander, welche einen Punkt gemein haben, heißt ein Winkel. Die beyden, ihn bildenden Linien heißen seine Schenkeln, und der gemeinschaftliche Punkt ihrer Vereinigung sein Scheitel oder seine Spitze. Z. B. Fig 4 stellt einen Winkel vor, an welchem AC und BC ein Schenkel und C der Scheitel ist.

Man bezeichnet einen Winkel entweder durch den Buchstaben am Scheitel, oder durch einen kleinen, zwischen die

Schenkel gesetzten, oder durch die 3 Buchstaben an dem Winkel, wo bey letzterer Art der Buchstabe am Scheitel immer in die Mitte gesetzt werden muß. Z. B. der Winkel Fig. 4 wird entweder durch C oder x oder ACB oder BCA bezeichnet.

§. 18.

b) Eintheilung der Winkel.

Ein Winkel heißt geradlinig (Fig. 4), wenn seine Schenkel gerade, krummlinig (Fig. 5), wenn dieselben krumme Linien sind, und gemischtlinig (Fig. 6), wenn ein Schenkel gerad und der andere krumm ist.

Ein krummliniger Winkel, dessen Schenkeltheile einer Kreislinie (§. 12) sind, heißt ins Besondere ein sphärischer Winkel (von sphaera, σφαῖρα).

§. 19.

Wenn zwey Winkel eine solche Lage gegeneinander haben, daß ihnen ein Schenkel und ein Scheitel gemeinschaftlich zukömmt, und die beyden anderen Schenkel in einer geraden Linie liegen, so heißen dieselben Nebenwinkel. Fig. 7 sind x und y Nebenwinkel. Wenn hierbey der gemeinschaftliche Schenkel gegen die beyden andern, sich in einer geraden Linie befindenden, eine solche Lage hat, daß die Schenkel der Nebenwinkel gleiche Neigungen haben, so heißt jeder derselben m und n (Fig. 8) ein rechter Winkel, oder schlechtweg ein Rechter (rectus). Ein rechter Winkel ist also derjenige, bey welchem die beyden Schenkel senkrecht aufeinander stehen (§. 13); man bezeichnet ihn mit R, indem man z. B. sagt Fig. 8, m = R oder n = R.

§. 20.

Die Größe eines Winkels hängt von der Neigung oder

Abweichung seiner Schenkel gegeneinander ab, und es dient der Rechte als Maas für die übrigen.

Man nennt einen Winkel, welcher kleiner ist, als ein Rechter, einen spitzen (Fig. 4) und einen solchen, welcher größer ist, als ein Rechter, einen stumpfen Winkel (Fig. 9). Alle Winkel, welche hiernach gleiche Benennungen führen, heißen gleichnamig, im entgegengesetzten Falle, ungleichnamig.

Ein Winkel, welcher eben so groß ist, als zwey Rechte (Fig. 8) m und n zusammen, bey welchen also die beyden Schenkel in eine gerade Linie fallen, heißt ein gerader Winkel. Z. B. Fig. 10 ist ACB ein gerader Winkel.

Ein Winkel, welcher größer ist, als ein gerader, oder zwey Rechte, heißt ein erhabener oder convexer Winkel, so wie derjenige, welcher kleiner als ein gerader oder zwey Rechte zusammengenommen ist, ein hohler oder concaver Winkel genannt wird. Alle Winkel, welche nicht Rechte sind, heißen im Allgemeinen schiefe Winkel. Die nähere Bestimmung der Größe eines Winkels wird durch den Kreisbogen ausgedrückt, welchen man sich aus jedem beliebigen Punkte des einen Schenkels in stets gleichem Abstande vom Scheitel bis zum anderen Schenkel gezogen denkt. Man benennt dann den Winkel durch dieselbe Anzahl Grade, Minuten Sekunden ꝛc., welche dieser Bogen angibt. Es hat demnach ein rechter Winkel 90°, und ein gerader 180°; ein spitzen aber weniger, und ein stumpfer mehr als 90°; so wie ein hohler weniger und ein erhabener mehr als 180°.

Anmerkung. Wenn es nicht besonders erwähnt wird, wird unter jedem Winkel immer nur ein hohler verstanden.

§. 21.

Ein Winkel, welcher einen andern zu einen Rechten ergänzt, heißt dessen Complement (complementum); je-

ner, welcher einen andern zu zwey Rechten ergänzt, heißt dessen Supplement (supplementum). Z. B. Fig. 11 ist m das Complement von n und so umgekehrt, und Fig. 7 ist x das Supplement von y und so umgekehrt.

§. 22.

Wenn zwey Winkel eine solch' entgegengesetzte Lage haben, daß ihnen der Scheitel gemeinschaftlich zukömmt, und je zwey und zwey Schenkel in einer geraden Linie liegen, so heißen dieselben Scheitel- oder Vertikalwinkel (anguli verticales). Fig. 12 sind x und y solche Winkel, und ebenso auch o und p.

§. 23.

c) Postulat.

Man kann die Schenkeln eines Winkels nach Belieben verlängern oder verkürzen, ihre Neigung gegeneinander bleibt dieselbe.

Zusätze:

1) Die Größe eines Winkels wird nicht verändert, wenn man die Schenkeln desselben beliebig verkürzt oder verlängert (Postulat und §. 20).
2) Winkel die gleiche Neigungen der Schenkel haben, sind gleich groß, decken sich, sind congruent (§. 8).
3) Alle rechte Winkel sind einander congruent.

§. 24.

d) Lehrsätze.

I. Die Summe zweyer Nebenwinkel ist zweyer Rechten gleich.

Beweis: Fig. 7. *)

*) Man lese über die Verfahrungsart bey der Führung der Beweise die Vorrede zu diesem Theile.

Th) $ACD + BCD = 2R$

D) $ACD + BCD$ ist gleich dem geraden Winkel ACB (§. 20) und nach demselben § ist $ACB = 2R$, folglich ist auch $ACD + BCD = 2R$.

Zusätze:

1) Zwey Winkel, die einen gemeinschaftlichen Schenkel haben, und zusammen zweyen Rechten gleich sind, sind Nebenwinkel.

2) Jeder von zwey gleichen Nebenwinkeln ist ein Rechter.

3) Ist einer von zwey Nebenwinkeln ein Rechter, so ist es auch der andere.

4) Ist einer von zwey Nebenwinkeln spitz, so ist der andere stumpf, und so umgekehrt.

5) Jeder gerade Winkel ist zweyen Rechten gleich.

§. 25.

II. Alle Winkel, welche auf einer Seite einer geraden Linie von einem Scheitel aus möglich sind, sind zusammen zweyen Rechten gleich.

Beweis: Fig. 13.

Th) $m + n + x + y = 2R$

D) $\left.\begin{aligned} m + n + x + y &= ACB \\ ACB &= 2R \end{aligned}\right\}$ §. 20.

also $m + n + x + y = 2R$.

Zusatz. Alle möglichen Winkel, um einen Punkt herum zusammengenommen, sind vieren Rechten gleich.

§. 26.

III. Alle Scheitel- oder Vertikalwinkel sind einander gleich.

Beweis: Fig. 12.

Th) $x = y$

D) $\left.\begin{array}{l} x + p = 2R \\ y + p = 2R \end{array}\right\}$ als Nebenwinkel (§. 24.)

also auch $x + p = y + p$, und endlich durch Subtraktion des p auf beyden Seiten $x = y$.

Auf dieselbe Art geschieht auch der Beweis für $o = p$.

Zusätze:

1) Ist einer der Vertikalwinkel bekannt, so sind es auch die 3 übrigen; denn ist z. B. Fig. 12 der Winkel x bekannt, so ist $y = x$ und $p = o = 180^\circ - x$; denn $y + p = 2R = 180^\circ$ als Nebenwinkel, woraus
$$p = 180^\circ - y = 180^\circ - x.$$

2) Ist einer der Vertikalwinkel ein Rechter, so sind es alle viere.

B.

Die Parallellinien.

§. 27.

a) Erklärungen.

Zwey oder mehrere Linien die immer in denselben gleichen Entfernungen von einander fortlaufen, und in dieser gegenseitigen Lage blieben, wenn man sie bis ins Unendliche verlängerte, heißen Parallellinien, und man sagt sie sind parallel (parallelus, παράλληλος) mit- oder zueinander.

Um den Parallelismus zweyer oder mehrerer Linien auszudrücken, bedient man sich des Zeichens (#) z. B. Fig. 14 AB # CD heißt AB ist parallel mit CD.

§. 28.

Wenn zwey Parallellinien AB und CD (Fig. 14) von einer dritten geraden Linie EF durchschnitten werden, so

entstehen 8 Winkel, nehmlich vier äußere x, y, v, p und vier innere z, m, n, o. Von denselben heißen in wechselseitiger Beziehung z und o, so wie m und n innere, x und p, so wie v und y äußere Wechselwinkel; m und o, so wie n und z innere, p und y, so wie v und x äußere auf einer Seite liegende Winkel; p und m, v und z, x und n, y und o äußere den innern entgegengesetzte Winkel.

§. 29.

b) Lehrsätze.

I. Wenn zwey Parallellinien durch eine dritte gerade Linie durchschnitten werden, so ist:

Erstens: Die Summe zweyer inneren oder äußeren auf einer Seite liegenden Winkel gleich 2 R.

Zweytens: Jeder äußere Winkel seinem innern entgegengesetzten gleich, und so umgekehrt.

Drittens: Ein Wechselwinkel dem andern gleich.

Beweis: Fig. 14. Der Beweis zerfällt in 3 Abtheilungen.

Erstens: *Th)* $m + o = 2R$

D) AB ♯ CD.

Man denke sich die Linie CD stets in paralleler Richtung näher gerückt, und endlich auf AB gelegt, so werden alle Theile der ersteren auf letztere fallen, und ebenso auch, da EF eine gerade Linie ist, sich die Winkel p und m, o und y, n und x, v und z decken und nach §. 8 einander gleich seyn; folglich

$o = y$, und da

$y + m = 2R$ als Nebenwinkel (§. 24.)

so ist auch $m + o = 2R$.

Zweytens: *Th)* $o = y$

D) AB # CD.

Nach dem Vorhergehenden ist

$m + o = 2R$, und

nach §. 24 $m + y = 2R$

folglich $m + o = m + y$ und

$o = y$.

Drittens: *Th)* $x = p$

D) AB # CD.

Nach dem Vorhergehenden ist

$x = n$ und

nach §. 26 $n = p$ als Vertikalwinkel

folglich $x = p$.

Anmerkung: Die Beweise für die übrigen Winkel werden ebenso geführt, welches der Verfasser fleißigen Schülern zur Selbstbearbeitung überläßt.

Zusätze:

1) Wenn bey zwey geraden, von einer dritten durchschnittenen, Linien entweder die Summe zweyer inneren oder äußeren auf einer Seite liegenden Winkel gleich zweyen Rechten ist, oder einer der äußern Winkel seinem innern entgegengesetzten gleich ist, oder zwey Wechselwinkel einander gleich sind, so sind die durchschnittenen Linien zu einander parallel.

2) Findet unter diesen Umständen keine von diesen Bedingungen statt, so sind die Linien nicht parallel, sondern stossen auf derjenigen Seite zusammen, wo die Summe der beyden innern auf einer Seite liegenden Winkel kleiner als 2R ist.

3) Wenn zwey Linien mit einer dritten parallel sind, so sind sie auch unter sich parallel.

4) Wenn die durchschneidende Linie auf einer der Parallelen senkrecht steht, d. h. mit derselben einen rechten Winkel macht, so steht sie auch auf der andern senkrecht, und alle Winkel sind dann Rechte.

5) Alle, zwischen zwey Parallellinien gezogenen Senkrechten sind unter sich parallel.

6) Diese Senkrechten geben die Entfernung der beyden Parallellinien von einander an (§. 14. Anmerk.), und da diese Entfernungen gleich sind (§. 27), so sind auch diese Senkrechten einander gleich.

7) Durch einen jeden gegebenen Punkt außerhalb einer gegebenen Linie ist zu dieser nur eine Parallele möglich.

§. 30.

II. Wenn zwey oder mehrere gleichnamige Winkel (§. 20) eine solche Lage haben, daß ihre Schenkel parallel sind, so sind sie gleich.

Beweis: Fig. 15.

Th) ABC = DEF

D) AB ⧣ DE
BC ⧣ EF.

Man verbinde die beyden Scheitel durch eine gerade Linie miteinander und verlängere selbe gegen G zu, so ist nach §. 29 $x = y$ und
$m = n$

folglich $x + m = y + n$
d. h. ABC = DEF.

Zusatz: Haben die zwey gleichnamigen Winkel eine entgegengesetzte Lage, wie z. B. in Fig. 16, so wird der Beweis auf folgende Art geführt: Man ziehe BE, so ist, da hier AB ⧣ EF und BC ⧣ DE, nach §. 29

$$x = n \text{ und}$$
$$y = m$$

folglich $x + y = n + m$
d. h. $ABC = DEF$.

§. 31.

III. Wenn zwey ungleichnamige Winkel eine solche Lage haben, daß ihre Schenkel parallel sind, so ist die Summe derselben zweyen Rechten gleich.

Beweis: Fig. 17.

Th) $m + n = 2R$

D) $EF \# BC$
$DE \# AB$

Man verlängere DE bis an die Linie BC, so erhält man

$$\left.\begin{array}{r} m = x \\ n + x = 2R \end{array}\right\} \text{(§. 24 u. 30 Zus.)}$$

folglich $m + n = 2R$.

Zusatz: Wenn zwey Winkel eine solche Lage haben, daß ihnen ein Schenkel gemein ist, und die beyden anderen zu einander parallel sind, so ist die Summe dieser Winkel zweyen Rechten gleich. Z. B. Fig. 38 ist

$BAD + ADC = 2R$. (§. 29.)

II. Hauptstück.

Die Planimetrie.

I. Abschnitt.

Vorkenntnisse.

§. 32.

a) Erklärungen.

Die Planimetrie ist jener Theil der Geometrie, welcher von der Lage, Größe und Beschaffenheit der ebenen Flächen handelt.

§. 33.

Eine Fläche heißt eben oder eine Ebene, wenn jede beliebige gerade Linie, welche man in ihr zieht, auch ganz in der Fläche liegt. Eine Fläche heißt krumm, wenn von ihr kein Theil gerad ist.

Anmerk. In der Planimetrie werden die Betrachtungen nur auf Ebenen, und zwar, ohne nicht besonderer Erwähnung, auch immer nur auf eine und dieselbe Ebene beschränkt. Ebenso wird auch, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil gesagt wird, unter Ebene, immer eine von allen Seiten begränzte Ebene verstanden.

§. 34.

Jene, die Ebene begränzenden Linien heißen die Seiten, und die, von diesen gebildeten Ecken, die Winkel der Ebene.

Die ganze Gränze einer Ebene heißt ihr Umfang oder Perimeter (perimetros, περίμετρος).

§. 35.

Eine gerade Linie, innerhalb den Gränzen einer Ebene von einem beliebigen Winkel zu irgend einen anderen gezogen, ohne mit einer Seite zusammen zu treffen, wird eine Diagonallinie oder Diagonale (Diagonalis von διᾶ und γωνία) genannt. Fig. 40 BD.

§. 36.

b) Eintheilung.

Eine Ebene heißt geradlinig, oder krummlinig, oder gemischtlinig, je nachdem die, sie einschließenden Seiten alle gerad oder krumm, oder aus geraden und krummen Linien zusammengesetzt sind.

§. 37.

Man theilt die Ebenen ferners nach der Anzahl ihrer, sie begränzenden Seiten, in 3, 4, 5seitige u. s. w. Eine solche Ebene aus 3 Seiten heißt ein Dreyeck (triangulum) Fig. 20, eine aus vier Seiten ein Viereck (tetragonum, τετράγωνον) Fig. 39 und eine jede, welche mehr als vier Seiten hat, überhaupt ein Vieleck oder Polygon (polygonum von πολύγονος). Diejenige Ebene, welche von einer Kreislinie (§. 12) begränzt ist, wird eine Kreisebene oder schlechtweg ein Kreis oder Zirkel (circulus) genannt. Fig. 59 BHADM.

§. 38.

Eine Ebene heißt regulär, wenn in ihr alle Seiten und Winkel gleich sind, und irregulär, wenn nicht alle Seiten und Winkel gleich sind.

§. 39.

c) Grundsatz.

Durch 3 gegebene Punkte, welche nicht in einer geraden Linie liegen, ist die Lage einer Ebene vollkommen bestimmt, und nur eine Ebene möglich.

§. 40.

d) Postulate.

1) Man kann sich jede Ebene über ihre Gränzen hinaus ins Unendliche erweitert denken.

2) Eine jede Ebene hat eben so viele Winkel, als Seiten, indem die erste Seite mit der zweyten den ersten, diese mit der dritten den zweyten ꝛc., und die letzte mit der ersten den letzten Winkel macht.

3) Eine geradlinige Ebene muß wenigstens 3 Seiten haben, weil sich zwey gerade Linien nur in einem Punkte berühren, und also keine Ebene einschließen können.

4) Die Ebenen verhalten sich alle zu einander, wie ihre Größen, d. h. wie ihre Flächeninhalte. (§. 7.)

II. Abschnitt.

Die Ebenen an und für sich, und die Vergleichung derselben unter sich.

A.

Die Dreyecke.

§. 41.

a) Erklärungen.

Ein Dreyeck (triangulum) ist im allgemeinen eine von 3 Linien (Seiten) begränzte Fläche.

§. 42.

Hat ein krummliniges Dreyeck die Eigenschaft, daß eine jede ihrer Seiten sowohl, als auch eine jede, in ihr gezogene Linie Theile von congruenten Kreislinien sind, so heißt dasselbe insbesondere ein sphärisches Dreyeck (triangulum sphaericum), von welchem die sphärische Trigonometrie handelt.

In der Planimetrie versteht man unter Dreyeck immer eine von 3 geraden Linien (Seiten) begränzte Ebene.

§. 43.

Man bezeichnet ein Dreyeck durch die drey, an seinen Winkeln stehenden Buchstaben, welchen man noch das Zeichen (△) vorsetzt.

§. 44.

Sind die 3 Seiten eines Dreyeckes einander gleich, so heißt das Dreyeck gleichseitig; sind nur zwey Seiten einander gleich, gleichschenklig; und ist keine Seite der andern gleich, ungleichseitig. In einem gleichschenkli-

gen Dreyecke werden die zwey gleichen Seiten die Schenkel des Dreyeckes genannt.

§. 45.

Enthält ein Dreyeck einen rechten Winkel, wie z. B. Fig. 18 bey B, so heißt es rechtwinklig; enthält es einen stumpfen Winkel, wie z. B. Fig. 19 bey C, stumpfwinklig; sind aber alle 3 Winkel spitz, wie z. B. Fig. 20, so nennt man es spitzwinklig. Dreyecke, welche nicht rechtwinklig sind, nennt man im Allgemeinen schiefwinklig, weil sie dann lauter schiefe Winkel enthalten. (§. 20).

§. 46.

In einem rechtwinkligen Dreyecke werden insbesondere die zwey Seiten, welche den rechten Winkel bilden (Fig. 18 AB u. BC) die Katheten (καθέται) genannt, und die, dem rechten Winkel gegenüberstehende Seite AC heißt die Hypothenuse, (von ὑποθεν οὖσα).

§. 47.

Diejenige der Seiten, auf welche man sich ein Dreyeck ruhend vorstellt, heißt die Basis (basis, βάσις) oder Grundlinie, und der, derselben gegenüberstehende Winkel, die Spitze des Dreyeckes. In gleichschenkligen Dreyecken ist immer der, von den gleichen Seiten, eingeschlossene Winkel die Spitze, und also die 3te Seite, welche mit den andern ungleich ist, die Grundlinie. Diejenige senkrechte Linie, welche man sich von der Spitze eines Dreyeckes auf dessen Grundlinie gefällt denkt, heißt die Höhe des Dreyeckes. (Fig. 20 DG)

§. 48.

b) Postulat.

In jedem Dreyecke ist die Höhenlinie die kürzeste Entfernung von der Spitze bis zur Grundlinie. (§. 14. Zus. 5.)

Zusätze:

1) Jede schiefe Linie, von der Spitze eines Dreyeckes auf die Grundlinie gezogen, wird desto größer, je mehr sie sich von der Senkrechten entfernt.

2) In einem jeden spitzwinkligen Dreyecke fällt diejenige Linie, welche die Höhe bezeichnet (§. 47) allzeit innerhalb der Gränzen des Dreyeckes (Fig. 20 DG).

3) Betrachtet man in einem rechtwinkligen Dreyecke eine der Katheten als Grundlinie, so bezeichnet die andere die Höhe, d. h. die Höhenlinie fällt auf eine der Gränzlinien des Dreyeckes. Ist z. B. Fig. 18 BC die Grundlinie, so ist AB die Höhe.

4) Betrachtet man in einem rechtwinkligen Dreyecke die Hypothenuse als Grundlinie, so wird der rechte Winkel die Spitze, und die Höhenlinie fällt innerhalb des Dreyeckes.

5) Betrachtet man in einem stumpfwinkligen Dreyecke eine von jenen Seiten, welche den stumpfen Winkel einschließen, als Grundlinie, so fällt die Höhenlinie außerhalb der Gränzen des Dreyeckes. In einem solchen Falle wird die Größe der Höhenlinie dadurch bestimmt, daß man sich die Grundlinie bis zu ihr verlängert denkt. In Fig. 19 stellt demnach AD die Höhe des Dreyeckes ABC vor.

6) Betrachtet man in einem stumpfwinkligen Dreyecke die, dem stumpfen Winkel gegenüberstehende, Seite als Grundlinie, so fällt die Höhenlinie innerhalb der Gränzen des Dreyeckes.

7) Dreyecke, welche gleiche Höhen haben, liegen so zwischen zwey Parallellinien (§. 29 Zus. 6), daß ihre Grundlinien in der einen, und ihre Spitzen in der andern Parallele sich befinden; und so umgekehrt: Dreyecke, welche zwischen zwey Parallellinien liegen, haben gleiche Höhen. (§. 29. Zus. 6.)

§. 49.

c) Lehrsätze.

α) Ueber die Concruenz der Dreyecke.

I. Wenn in zwey Dreyecken zwey Seiten und ein Winkel einander gegenseitig gleich sind, so sind die Dreyecke congruent.

Beweis: Hier können zwey Fälle statt finden; denn entweder ist 1) der gleiche Winkel von den beyden gleichen Seiten eingeschlossen oder 2) er steht einer derselben gegenüber.

ad 1) (Fig. 21).

$$\frac{Th)\ \triangle\ ABC \cong \triangle\ DEF}{D)\ AB = DE,\ BC = EF,\ ABC = DEF.}$$

Um die Congruenz dieser Dreyecke zu beweisen, lege man das △ DEF so auf das △ ABC, daß der Winkel E auf B zu liegen kommt. Hierdurch decken sich auch die Schenkel dieser Winkel (§. 23 Post. 2), und, da Bedingung ist, daß diese Schenkel gleich sind, so fallen auch ihre Endpunkte, durch welche die Seiten AC und DF bestimmt sind, gegenseitig aufeinander (§. 16). Folglich decken sich auch die 3ten Seiten, und deßhalb die beyden Dreyecke ganz, und es ist daher △ ABC $\cong$ △ DEF (§. 8).

ad 2) (Fig. 21).

$$\frac{Th)\ \triangle\ ABC \cong \triangle\ DEF}{D)\ AB = DE,\ BC = EF,\ \alpha = \beta.}$$

Man lege das △ DEF so auf das △ ABC, daß D auf A, folglich DE längs AB und DF längs AC fällt, weil $\alpha = \beta$, wonach dann E in B fallen muß, da DE = AB. Endlich muß auch F auf C fallen; denn fiele F zwischen A und C, z. B. in G, so, daß also EF = BG würde, so müßte auch BG = BC seyn. Es ist aber hier BG < BC, weil jede gerade Linie, je näher sie der

Senkrechten aus der Spitze des Dreyeckes rückt, desto kleiner werden muß (§. 48. Zus. 1); folglich kann F nicht zwischen A u. C fallen. Eben so wenig kann aber auch F über C hinaus, z. B. in H fallen, weil da auch eben so wenig EF = BH seyn kann, indem jede Linie, je mehr sie sich von einer Senkrechten aus der Spitze eines Dreyeckes entfernt, desto größer werden muß (§. 48 Zus. 1); folglich kann auch F nicht über C hinaus, sondern muß auf C selbst fallen. Hieraus folgt nun

AC = DF, und da
auch AB = DE
und $\alpha = \beta$

so ist $\triangle$ ABC $\cong$ $\triangle$ DEF (Beweis ad 1).

Zusätze:

1) Da sich in congruenten Dreyecken alle Seiten decken, so sind die gleichliegenden Winkel und gleichliegenden Seiten einander gleich.
2) In congruenten Dreyecken, oder, wenn man jedes Dreyeck mit sich selbst als congruent betrachtet, in jedem Dreyecke, stehen gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber, und so umgekehrt. (Zus. 1.)
3) In jedem gleichschenkligen Dreyecke sind die zwey Winkel an der Grundlinie einander gleich (Zus. 2, und §. 44); denn jedes Dreyeck ist sich selbst congruent.
4) In jedem gleichseitigen Dreyecke sind die 3 Winkel einander gleich (Zus. 2 und §. 44).
5) Zwey rechtwinklige Dreyecke, in welchen die 2 Katheten einander gleich sind, sind congruent, denn jeder der eingeschlossenen Winkel = R. (Beweis ad 1), oder, wenn die Hypothenusen und eine der Katheten in beyden Dreyecken einander gleich sind. (Beweis ad 2.)
6) Durch 2 Seiten und einen Winkel ist ein Dreyeck vollkommen bestimmt. (Lehrs.) Jedoch muß ad 2 des

des Beweises stets der, der größeren Seite gegen berstehende Winkel, der Bekannte seyn, weil es sonst zweifelhaft bleibt, ob BC nicht so klein ist, daß es AC nicht mehr erreichen kann.

7) Zur Bestimmung eines rechtwinkligen Dreyeckes sind nur die beyden Katheten oder die Hypothenuse und eine Kathete nöthig. (Zus. 6.)

8) Wenn sich in zwey Dreyecken zwey Seiten gleich und parallel sind, so sind die Dreyecke congruent; denn ist z. B. (Fig. 21) AB ⧣ DE und BC ⧣ EF, so ist $\gamma = \delta$ (§. 30), und da auch AB = DE und BC = EF, so ist △ ABC ≌ △ DEF. (Lehrs.)

§. 50.

II. Wenn in 2 Dreyecken alle 3 Seiten der Ordnung nach einander gleich sind, so sind die Dreyecke congruent.

Beweis: (Fig. 22).

Th) △ ABC ≌ △ DEF

D) AB = DE, BC = EF, AC = DF.

Man lege die beyden Dreyecke so nebeneinander hin, daß DF auf AC, also D auf A und F auf C fällt, und das △ DEF die entgegengesetzte Lage vom △ ABC erhält, wie Fig. 22 diese 2 Dreyecke vorstellt, in welchen DE = AE = AB, EF = CE = BC und DEF = AEC ist, folglich △ DEF ≌ △ AEC (§. 49) wird. Zieht man die gerade Linie BE, so entstehen auf beyden Seiten derselben zwey gleichschenklige Dreyecke BAE und BCE, in welchen also

$$\left.\begin{array}{l} x = y \\ z = q \end{array}\right\} \text{(§. 49. Zus. 3)}$$

$$\overline{x + z = y + q} \text{ oder ABC = AEC also auch}$$

$$\text{ABC = DEF.}$$

Es sind demnach in den gegebenen Dreyecken zwey Seiten und der davon eingeschlossene Winkel einander gleich, folglich nach §. 49 △ ABC ≌ △ DEF.

Zusätze:

1) Wenn in einem Dreyecke alle 3 Seiten gegeben sind, so ist dasselbe vollkommen bestimmt. (Lehrs.)
2) Wenn in einem Dreyecke alle 3 Seiten einander gleich sind, so sind es auch alle 3 Winkel d. h. das Dreyeck ist gleichseitig. (§. 49. Zus. 2.)

§. 51.

III. Zwey Dreyecke, welche gegenseitig eine Seite und zwey gleichliegende Winkel einander gleich haben, sind congruent.

Beweis: Hier sind zwey Fälle möglich; entweder sind 1) beyde gegebenen Winkel an der gegebenen Seite anliegend, oder 2) es findet selbes nur bey einem der Winkel statt.

ad 1) (Fig. 21).

Th) $\triangle$ ABC $\cong$ $\triangle$ DEF

D) AC = DF, BAC = EDF, BCA = EFD.

Man lege die Dreyecke so aufeinander, daß DF auf AC, folglich D auf A und F auf C fällt, so kömmt DE längs AB, so wie EF längs BC zu liegen, weil sie mit AC und DF gleiche Winkel machen. Da nun E und B die Durchschnittspunkte der, sich in allen Punkten deckenden, Linien AB und DE, BC und EF sind, so müssen auch diese Durchschnittspunkte aufeinander fallen, also

AB = DE und
BC = EF seyn.

Es ist aber auch AC = DF

folglich $\triangle$ ABC $\cong$ $\triangle$ DEF (§. 50).

ad 2) (Fig. 21).

Th) $\triangle$ ABC $\cong$ $\triangle$ DEF

D) AC = DF, BAC = EDF, ABC = DEF.

Legt man das $\triangle$ DEF so auf das $\triangle$ ABC, daß DF auf AC und also DE längs AB fällt, da EDF = BAC ist, so muß, weil DEF = ABC ist, EF ⋕ BC, und also auch EFD = BCA seyn (§. 29); folglich ist, da die beyden anliegenden Winkel gleich sind, $\triangle$ ABC ≌ $\triangle$ DEF (Beweis ad 1).

Zusätze:

1) Wenn in einem Dreyecke eine Seite und zwey Winkel bestimmt sind, so ist das Dreyeck selbst vollkommen bestimmt. (Lehrsatz.)

2) Wenn in einem Dreyecke zwey Winkel einander gleich sind, so sind auch die, denselben gegenüberstehenden Seiten einander gleich, d. h. das Dreyeck ist gleichschenklig. (§. 49. Zus. 2 u. 3.)

3) Wenn in einem Dreyecke alle 3 Winkel gleich sind, so sind es auch alle 3 Seiten, d. h. das Dreyeck ist gleichseitig. (§. 49. Zus. 2 u. 4).

4) Wenn zwey rechtwinklige Dreyecke einen spitze Winkel und eine gleichliegende Seite miteinander gemein haben, so sind dieselben congruent. (Lehrsatz.)

5) Parallellinien zwischen Parallellinien sind einander gleich; denn, wenn (Fig. 23) MN ⋕ OP und QR ⋕ ST, so ist auch CD ⋕ AB und AC ⋕ BD. Zieht man nun BC, so ist

$$\begin{array}{c} BC = BC \\ \left.\begin{array}{c} m = n \\ x = y \end{array}\right\} (\text{§. 29.}) \\ \hline \end{array}$$

also $\triangle$ ABC ≌ $\triangle$ BCD (Lehrs.)
und folglich AC = BD und CD = AB.

§. 52.

β) Ueber die Gleichheit der Dreyecke.

Zwey Dreyecke von einerley Grundlinie und gleicher Höhe sind einander gleich.

Beweis: Hier können zwey Fälle statt finden. 1) Entweder laufen in den beyden Dreyecken 2 Seiten miteinander parallel, oder 2) es findet dieses nicht statt.

Erstens: (Fig. 24).

Th) $\triangle$ ABC = $\triangle$ ACD

D) AC = AC, BD # AC (§. 48. Zus. 7) und AB # CD.

Es ist auch AB = CD (§. 51. Zus. 5)
$\alpha = \beta$ (§. 29)
$\gamma = \delta$ (§. 26)

also ist $\triangle$ ABE $\cong$ $\triangle$ CDE (§. 51.).

Ferners ist + $\triangle$ AEC = + $\triangle$ AEC

folglich $\triangle$ ABE + $\triangle$ AEC = $\triangle$ CDE + $\triangle$ AEC,
nehmlich $\triangle$ ABC = $\triangle$ ACD.

Zweytens: (Fig. 25).

Th) $\triangle$ ABC = $\triangle$ ACD

D) AC = AC und BD # AC (§. 48. Zus. 7).

Man denke sich durch A eine Parallele zu CD und durch C eine Parallele zu AB, bis sie beyde BD in E und F durchschneiden, so ist

BF = AC = ED (§. 51. Zus. 5)
— EF = — EF

also BE = FD

Ferners ist AB = CF, AE = CD (§. 51. Zus. 5)

folglich $\triangle$ ABE $\cong$ $\triangle$ CDF
+ ACEF = + ACEF

also ABCF = AECD und
auch $\frac{1}{2}$ ABCF = $\frac{1}{2}$ AECD.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Da nun } AB = CF \\ \phantom{\text{Da nun }} AC = BF\end{array}\right\} (\text{§. 51. Zus. 5})$$
$$BC = BC$$

so ist $\triangle$ ABC $\cong$ $\triangle$ BCF (§. 50) $\cong$ $\frac{1}{2}$ ABCF.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Und da } CD = AE \\ \phantom{\text{Und da }} AC = ED\end{array}\right\} (\text{§. 51. Zus. 5})$$
$$AD = AD$$

so ist auch $\triangle$ ACD $\cong$ $\triangle$ AED (§. 50) $\cong$ $\frac{1}{2}$ AECD, mithin $\triangle$ ABC $=$ $\triangle$ ACD.

Zusätze:

1) Dreyecke von gleichen Grundlinien und gleichen Höhen sind sich gleich; denn betrachtet man (Fig. 25) die Dreyecke BCF und ACD, so sind dieselben einander gleich; denn, weil nach dem Lehrsatze
$\triangle$ ACD $=$ $\triangle$ ABC und
weil auch $\triangle$ BCF $\cong$ $\triangle$ ABC (da sie alle 3 Seiten gleich haben) so ist $\triangle$ ACD $=$ $\triangle$ BCF.

2) Rechtwinklige Dreyecke, welche ihre Katheten gegenseitig gleich haben, sind gleich. (§. 48. Zus. 3.)

3) Jedes schiefwinklige Dreyeck ist einem rechtwinkligen gleich, das mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat. (Lehrs.)

§. 53.

γ) Ueber die Lage und Größe gerader Linien und Winkel in Dreyecken.

I. In einem jeden Dreyecke sind zwey Seiten zusammengenommen immer größer als die dritte Seite.

Beweis: (Fig. 20).

Th) DE + DF > EF.

Die Wahrheit dieses Satzes geht aus dem Grundsatze 3, §. 14 hervor, weil zwischen den Punkten E und F die ge-

rade Linie EF die kürzeste, also jede aus zwey Linien zusammengesetzte, und außer ihr liegende größer seyn muß. Folglich DE + DF > EF.

§. 54.

II. In einem jeden Dreyecke ist die Summe aller 3 Winkel zusammengenommen zweyen Rechten gleich.

Beweis: (Fig. 26).

Th) $m + n + o = 2R$.

Man denke sich durch B eine Parallele zu AC, so entstehen zwey neue Winkel p und q. Vermöge §. 25 ist

$$p + m + q = 2R.$$

Denkt man sich die beyden Parallelen durch eine 3te Linie AB durchschnitten, so ist $p = n$ (§. 29), und denkt man sich dieselben auch durch BC durchschnitten, so ist aus demselben Grunde auch $q = o$, folglich ist durch Substitution von n und o auch $m + n + o = 2R$.

Zusätze:

1) Wenn in einem Dreyecke zwey Winkel bekannt sind, so ist es auch der dritte; denn derselbe ist gleich 2R weniger der Summe der beyden gegebenen. D. h. z. B. $m = 2R - (n + o)$.

2) Wenn in zwey Dreyecken zwey Winkel einander gleich sind, so haben sie auch den 3ten Winkel gleich.

3) In einem jeden gleichschenkligen Dreyecke ist durch einen gegebenen Winkel auch jeder der übrigen bekannt; denn wäre △ ABC gleichschenklig, so wäre $n = o$ (§. 49. Zus. 3), also $m + 2n = 2R$ woraus $m = 2R - 2n = 2(R - n)$ und $n = R - \frac{m}{2}$.

4) In einem jeden gleichseitigen Dreyecke hat jeder Winkel 60°. (§. 49. Zus. 4.)

5) Ein gleichschenkliges Dreyeck, in welchem ein Winkel 60° hat, ist gleichseitig.

6) In einem jeden rechtwinkligen Dreyecke ist die Summe der zwey, an der Hypothenuse anliegenden, Winkel gleich R d. h. jeder derselben ist spitz. Ist daher einer von diesen bekannt, so ist es auch der andere.

7) In einem jeden stumpfwinkligen Dreyecke ist die Summe jener 2 Winkel, welche an der, dem stumpfen Winkel gegenüberstehenden, Seite anliegen, immer kleiner als R, d. h. jeder derselben ist spitz.

8) Es gibt daher kein Dreyeck, welches mehr als einen rechten oder mehr als einen stumpfen Winkel hätte.

§. 55.

III. In einem jeden Dreyecke steht der größern Seite auch der größere Winkel gegenüber.

Beweis: (Fig. 27).

Th) $m > n$

wenn *D)* $AC > BC$.

Man trage BC auf AC von C aus auf, so, daß nehmlich $CD = BC$ wird, und es ist, wenn man BD zieht,

$$ABD + x + n = 2R \quad (\S.\ 54)$$
$$x + y = 2R \quad (\S.\ 24)$$

also $x + y = ABD + x + n$ oder

$$y = ABD + n$$

mithin muß $y > n$ seyn; nun ist aber $y = DBC$, weil $CD = BC$ (§. 49. Zus. 3), also ist auch $DBC > n$ und endlich $m > n$, da DBC nur ein Theil von m ist.

Zusätze:

1) Denkt man sich in einem Dreyecke eine Seite verlängert, wie z. B. im △ ABD die Seite AD, so

ist, da y = ABD + n, der äußere Winkel des Dreyeckes den beyden innern entgegengesetzten zusammengenommen gleich.

2) In einem jeden Dreyecke steht der größten Seite der größte Winkel, und der kleinsten Seite der kleinste Winkel gegenüber, und so umgekehrt.

3) In einem rechtwinkligen Dreyecke ist die Hypothenuse die größte Seite.

4) In einem stumpfwinkligen Dreyecke ist diejenige Seite, welche dem stumpfen Winkel gegenübersteht, die größte.

§. 56.

IV. Wenn man sich in einem gleichschenkligen Dreyecke von der Spitze auf die Grundlinie eine Senkrechte gezogen denkt, so wird durch dieselbe der Winkel an der Spitze sowohl, als auch die Grundlinie halbirt, d. h. in zwey gleiche Theile getheilt.

Beweis: (Fig. 28).

Th) x = y und AD = CD

D) m = n = R, p = q, AB = BC; folglich ist vermöge §. 51. das

△ ABD ≌ △ BCD.

Mithin ist x = y und AD = CD.

Zusätze:

1) Wenn in einem gleichschenkligen Dreyecke eine, von der Spitze aus gezogene, gerade Linie die Grundlinie halbirt, so halbirt sie auch den Winkel, so wie das ganze Dreyeck, und steht auf der Grundlinie senkrecht; denn △ ABD ≌ △ BCD weil AD = CD, AB = BC u. BD = BD (§. 50).

2) Wenn man in einem solchen Dreyecke von der Mitte der Grundlinie nach der Spitze eine gerade Linie

zieht, so halbirt selbe den Winkel an der Spitze, so wie das ganze Dreyeck, und steht auf der Grundlinie senkrecht; denn

$$\begin{array}{c} AB = BC \\ AD = DC \\ BD = BD \\ \hline \end{array}$$

also $\triangle$ ABD $\cong$ $\triangle$ BDC (§. 50); folglich ist auch x = y und m = n = R (§. 24. Zus. 2).

3) Denkt man sich in einem gleichschenkligen Dreyecke von der Mitte der Grundlinie aus eine Senkrechte gezogen, so geht dieselbe durch die Spitze des Dreyecks, und theilt dasselbe, so wie den Winkel an der Spitze in zwey gleiche Theile.

4) Wenn eine gerade Linie den Winkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreyeckes halbirt, so halbirt selbe auch das Dreyeck, die Grundlinie und steht auf letzterer senkrecht; denn

$$\begin{array}{c} AB = BC \\ p = q \\ x = y \\ \hline \end{array}$$

also $\triangle$ ABD $\cong$ $\triangle$ BCD (§. 51), folglich auch AD = DC und m = n = R. (§. 24. Zus. 2).

§. 57.

V. Wenn man sich auf einem Schenkel eines beliebigen Winkels eine beliebige Anzahl gleiche Theile aufgetragen denkt, so schneiden die, durch die Theilungspunkte nach jeder beliebigen Richtung gegen den andern Schenkel gezogenen Parallellinien auf demselben eben so viel, unter sich gleiche Theile ab.

Beweis: (Fig. 29). Stellt BAC den gegebenen Winkel vor, sind Aa, ab, bc ꝛc. die auf AB genommenen gleichen Theile, und af, bg, ch ꝛc. die unter sich parallelen Linien, so ist

Th) Af = fg = gh ꝛc.

D) Aa = ab = bc ꝛc. und
af # bg # ch ꝛc.

Um dieses zu beweisen denke man sich durch die Punkte f, g, h ꝛc. lauter Parallellinien zum Schenkel AB des Winkels BAC, so erhält man fl = ab, gm = bc ꝛc. als Parallelen zwischen Parallelen (§. 51. Zus. 5), und da nach der Voraussetzung Aa = ab = bc ꝛc., so ist auch

Aa = fl = gm ꝛc.

Ferners ist auch

$$\left.\begin{array}{l}\alpha = \beta = \gamma \text{ ꝛc.}\\ \text{und } \delta = \varepsilon = \eta \text{ ꝛc.}\end{array}\right\}\ (\S.\ 29)$$

folglich △ Aaf ≌ △ flg ≌ △ gmh ꝛc. (§. 51.)
woraus Af = fg = gh ꝛc. folgt.

Zusätze:

1) Da auf dem Schenkel AB der Theil Aa dem Theile Af auf dem Schenkel AC entspricht, so entspricht dem Theile Ab = 2Aa der Theil Ag = 2Af, ebenso für Ac = 3Aa der Theil Ah = 3Af u. s. w.; d. h. die, durch die Parallellinien auf den Schenkeln abgeschnittenen Stücke stehen in geradem Verhältnisse zu einander.

2) Betrachtet man das △ Akd, so sind ch, bg und af zu einer Seite dk des Dreyecks parallel.

3) Wenn man sich in einem Dreyecke zu einer Seite eine Parallele gezogen denkt, so stehen die dadurch abgeschnittenen Stücke sowohl zu den ganzen Seiten, als auch unter sich in Proportion; d. h. (Fig. 30), wenn

$$\left.\begin{array}{l}\text{DE \# BC ist, } AD : AB = AE : AC\\ \text{und } DB : AB = CE : AC\end{array}\right\}\ (\text{Zus. } 1)$$

folglich auch AD : DB = AE : CE (1ter Theil §. 323).

§. 58.

VI. Wenn man sich in einem Dreyecke zu einer Seite eine Parallele gezogen denkt, so verhält sich jedes dadurch abgeschnittene Stück an den zwey übrigen Seiten zu seiner ganzen Seite, wie die gezogene Parallele zur dritten Seite des Dreyecks.

Beweis: (Fig. 30).

Th) AD : AB = DE : BC
und AE : AC = DE : BC

D) DE ‡ BC.

Man denke sich durch E die Linie EF ‡ AB gezogen, so ist nach §. 57 Zus. 3

AE : AC = BF : BC.

Da nach §. 51. Zus. 5, BF = DE, so ist

AE : AC = DE : BC und da nach
§. 57. Zus. 3, AE : AC = AD : AB, so ist auch
AD : AB = DE : BC.

§. 59.

VII. Wenn in einem Dreyecke eine gerade Linie einen Winkel halbirt, und man zieht die Halbirungslinie bis zur entgegenstehenden Seite, so stehen die abgeschnittenen Stücke an dieser Seite mit den übrigen zwey Seiten des Dreyecks in Proportion.

Beweis: (Fig. 31). BD sey die Halbirungslinie des Winkels B, so erhält man

Th) AD : CD = AB : BC

D) m = n.

Man denke sich AB so weit verlängert bis diese Verlängerung BE = BC wird, und verbinde C und E durch eine gerade Linie, so ist das △ BCE gleichschenklig, also

p = q (§. 49. Zus. 3)

$m + n = p + q$ (§. 55. Zus. 1)

also $2n = 2p$ oder

$n = p$ folglich CE ⧣ BD (§. 29).

Hieraus folgt AD : CD = AB : BE (§. 57. Zus. 3) und weil BE = BC ist, AD : CD = AB : BC.

Zusatz: Wenn in einem Dreyecke aus einem Winkel nach der gegenüberstehenden Seite eine gerade Linie so gezogen ist, daß die abgeschnittenen Stücke dieser Seite mit den beyden andern des Dreyecks in Proportion stehen, so halbirt die gezogene Linie den genannten Winkel.

§. 60

δ) Ueber die Aehnlichkeit der Dreyecke.

I. Zwey Dreyecke, welche gegenseitig zwey gleiche Winkel haben, sind sich ähnlich.

Beweis: (Fig. 32).

Th) △ DEF ∽ △ ABC

D) $m = n$ und $y = o$.

Man lege das △ DEF so auf das △ ABC, daß zwey gleiche Winkel z. B. m und n aufeinander fallen, und das △ DEF einerley ist mit △ BGH, so ist GH ⧣ AC, weil $q = y = o$ (§. 29).

Hieraus folgt, daß auch $x = z = p$ ist (§. 54. Zus. 2); folglich haben alle Seiten der Dreyecke der Ordnung nach einerley Lage, d. h. die Dreyecke stimmen an Gestalt vollkommen überein, und sind daher ähnlich. (1ter Thl. Einleitung.)

Zusätze:

1) In ähnlichen Dreyecken sind die gleichliegenden Winkel einander gleich.

2) Wenn zwey rechtwinklige Dreyecke einen der spitzen Winkel miteinander gleich haben, so sind sie ähnlich.

3) Wenn zwey gleichschenklige Dreyecke einen Winkel gleich haben, so sind sie ähnlich.

4) Wenn man sich in einem Dreyecke zu einer Seite eine Parallele gezogen denkt, so ist das kleinere Dreyeck dem großen ähnlich. (verm. Beweis.)

5) Es stehen demnach in ähnlichen Dreyecken die gleichliegenden Seiten in Proportion. (§. 58.)

6) Wenn in zwey Dreyecken die 3 Seiten einander proportionirt sind, so sind die Dreyecke ähnlich.

7) Wenn man in ähnlichen Dreyecken ein Paar gleichliegende Seiten als Grundlinien betrachtet, so verhalten sich letztere eben so, wie die Höhen der Dreyecke. D. h. (Fig. 32) AC : DF = BJ : EK, wenn △ ABC ∽ △ DEF. Aus letzterem folgt BC : EF = AC : DF (Zus. 5), und da BJC = EKF = R sowohl, als auch BCJ = EFK, so ist auch △ BJC ∽ △ EKF (Lehrs.) also BC : EF = BJ : EK (Zus. 5), und endlich AC : DF = BJ : EK.

8) In ähnlichen rechtwinkligen Dreyecken verhalten sich 2 gleichliegende Katheten eben so, wie die beyden andern. (Zus. 5.)

§. 61.

II. Wenn zwey Dreyecke eiuen gleichen Winkel haben, und zwey gleichliegende Seiten in Proportion stehen, so sind die Dreyecke ähnlich.

Beweis: Hier können zwey Fälle statt finden: Entweder ist der Winkel, welchen beyde Dreyecke gleich haben, von den, in Proportion stehenden Seiten eingeschlossen, oder er ist es nicht.

ad 1) (Fig. 32).

Th) △ ABC ∽ △ DEF

D) m = n, und AB : DE = BC : EF.

Man mache im △ ABC, BG = DE, BH = EF und ziehe GH, so ist, weil m = n ist, △ DEF ≌ △ BGH. (§. 49. 1.) Da nun nach der Voraussetzung AB : DE = BC : EF, so ist auch AB : BG = BC : BH, also nach §. 57. Zus. 1 u. 2 GH # AC, folglich nach §. 60. Zus. 4, △ ABC ∽ △ BGH und endlich auch △ ABC ∽ △ DEF.

ad 2) (Fig. 32).

Th) △ ABC ∽ △ DEF

D) o = y, BC : EF = AC : DF.

Man mache

BH = EF und GH # AC, so ist
△ BGH ∽ △ ABC (§. 60. Zus. 4), folglich
BC : BH = AC : GH (§. 60. Zus. 5), oder
BC : EF = AC : GH. Da nun vermöge *Dat.*
BC : EF = AC : DF so ist

GH = DF (1ter Th. §. 320 Satz 14).

Weil auch

BH = EF und
q = o = y (§. 29)

so ist △ BGH ≌ △ DEF (§. 48. 2).

Indem nun △ ABC ∽ △ BGH, so ist auch
△ ABC ∽ △ DEF.

Zusatz:

Wenn in zwey rechtwinkligen Dreyecken die beyden Katheten, oder die Hypothenuse und eine Kathete einander gegenseitig proportionirt sind, so sind diese Dreyecke einander ähnlich.

§. 62.

III. Eine Senkrechte in einem rechtwinkligen Dreyecke aus dem rechten Winkel auf die Hypothenuse theilt das

Dreyeck in zwey kleinere, welche unter sich und mit dem ganzen ähnlich sind.

Beweis: (Fig. 33).

Th) △ ADB ∽ △ CDB ∽ △ ABC

D) ADB = CDB = ABC = R.

Nun ist BAD = BAC, folglich

△ ADB ∽ △ ABC (§. 60).

Ferners ist auch

DCB = ACB, mithin

△ CDB ∽ △ ABC; also

△ ADB ∽ △ CDB ∽ △ ABC.

Zusätze:

1) Wenn man sich in einem rechtwinkligen Dreyecke aus dem rechten Winkel auf die Hypothenuse eine Senkrechte gezogen denkt, so ist dieselbe die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen den beyden abgeschnittenen Stücken der Hypothenuse; denn,

da △ ADB ∽ △ CBD, so ist

AD : DB = DB : CD (§. 60. Zus. 5) oder

AD : DB : CD.

2) Eine jede Kathete des großen Dreyeckes ist die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen der ganzen Hypothenuse, und dem Stücke derselben, welches an ihr anliegt; denn,

da △ ADB ∽ △ ABC und

△ CDB ∽ △ ABC, so ist

AD : AB = AB : AC und

CD : BC = BC : AC, (§. 60. Zus. 5),

oder AD : AB : AC und CD : BC : AC.

3) Die Quadrate aus den Größen der beyden Katheten verhalten sich ebenso wie ihre anliegenden Stücke der Hypothenuse; denn aus Zus. 2 folgt

$$AC = \frac{AB^2}{AD} \text{ und } AC = \frac{BC^2}{CD}, \text{ also}$$

$$\frac{AB^2}{AD} = \frac{BC^2}{CD} \text{ oder } AB^2 . CD = BC^2 . AD,$$

woraus die Proportion $AB^2 : BC^2 = AD : CD$ gebildet werden kann. (1ter Theil §. 320 Satz 3.)

4) In einem jeden rechtwinkligen Dreyecke ist das Quadrat aus der Größe der Hypothenuse gleich jener Summe, welche die Quadrate aus den Größen der beyden Katheten angeben; denn aus Zus. 2 ist

$$AD . AC = AB^2 \text{ und}$$
$$CD . AC = BC^2, \text{ folglich}$$

$$AD . AC + CD . AC = AB^2 + BC^2$$
$$AC (AD + CD) = AB^2 + BC^2 \text{ oder}$$
$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \text{ *)}$$

5) Es ist daher in einem jeden rechtwinkligen Dreyecke durch 2 Seiten auch die 3te bekannt.

§. 63.

c) Ueber die Vergleichung der Dreyecke unter sich.

I. Dreyecke von gleicher Höhe verhalten sich ebenso, wie ihre Grundlien.

Beweis: (Fig. 34).

Th) $\triangle ABC : \triangle DEF = AC : DF$

D) BE # AF (§. 48. Zus. 7).

Man nehme eine gewisse Größe einer Linie, z. B. das Stück AG als gemeinschaftliches Maas der zwey Grundli-

*) Dieser Satz wird von den Mathematikern der pythagoreische Satz genannt, weil der berühmte Πυθαγορας der Erfinder desselben war; er wird weiter unten auch noch als Lehrsatz auf die pythagoreische Art vorgetragen.

nien an, und theile dieselben dadurch. Dieses Maas sey in AC m mal, in DF aber n mal enthalten, so bekömmt man die Proportion AC : DF = m : n. Zieht man von allen Theilungspunkten nach den Spitzen der Dreyecke gerade Linien, so erhält man eben so viele kleinere Dreyecke, als die Grundlinie Theile hat, welche alle unter sich gleich sind. (§. 52. Zus. 1). Da nun dadurch das △ ABC in m und das △ DEF in n gleiche Theile getheilt wird, so ist △ ABC : △ DEF = m : n, woraus nach Vergleichung mit obiger Proportion auch △ ABC : △ DEF = AC : DF folgt.

Zusatz: Wenn zwey rechtwinklige Dreyecke eine Kathete gleich haben, so verhalten sie sich wie die andere Kathete. (Lehrs. u. §. 48. Zus. 3.)

§. 64.

II. Dreyecke mit gleichen Grundlinien verhalten sich wie ihre Höhen.

Beweis: (Fig. 35).

Th) △ ABC : △ DEF = BG : EH

D) AC = DF.

Man denke sich in einem Endpunkte von AC, z. B. in A eine Senkrechte auf AC, trage auf selber die Höhen BG = AJ und EH = AK auf, und ziehe JC und KC, so ist △ AJC = △ ABC und △ AKC = △ DEF (§. 52. Zus. 1). Betrachtet man nun AJ und AK als Grundlinien, so haben die Dreyecke AJC und AKC an AC gleiche Höhe, und man erhält daher nach §. 63

△ AJC : △ AKC = AJ : AK

oder △ ABC : △ DEF = BG : EH.

§. 65.

III. Alle Dreyecke verhalten sich zu einander, wie die Produkte aus ihren Grundlinien und Höhen.

Beweis (Fig. 36).

Th) $\triangle$ ABC : $\triangle$ DEF = AC . BG : DF . EH

D) Man mache GJ = EH und ziehe AJ u. JC, so ist $\triangle$ AJC : $\triangle$ DEF = AC : DF (§. 63) und
$\triangle$ ABC : $\triangle$ AJC = BG : JG od. EH (§. 64)

folglich $\triangle$ AJC $\times$ $\triangle$ ABC : $\triangle$ DEF $\times$ $\triangle$ AJC = AC . BG : DF. HE
oder $\triangle$ ABC : $\triangle$ DEF = AC . BG : DF . EH.

Zusatz: Dreyecke, in welchen die Produkte aus den Grundlinien mit den Höhen einander gleich sind, sind ebenfalls gleich; denn ist AC . BG = DF . EH, so ist auch $\triangle$ ABC = $\triangle$ DEF. (Man sehe den Beweis des Lehrsatzes).

§. 66.

IV. Aehnliche Dreyecke verhalten sich zu einander ebenso, wie die Quadrate zweyer gleichliegenden Seiten.

Beweis: (Fig. 32).

Th) $\triangle$ ABC : $\triangle$ DEF = AC^2 : DF^2

D) $\triangle$ ABC $\backsim$ $\triangle$ DEF. Nach §. 65 ist
$\triangle$ ABC : $\triangle$ DEF = AC . BJ : DF . EK und
nach §. 60. Zus. 7; BJ : EK = AC : DF

folglich: $\triangle$ ABC . BJ : $\triangle$ DEF . EK = AC^2 . BJ : DF^2 . EK
oder $\triangle$ ABC : $\triangle$ DEF = AC^2 : DF^2.

Zusatz: Aehnliche rechtwinklige Dreyecke verhalten sich wie die Quadrate zweyer gleichliegenden Katheten oder der Hypothenusen.

§. 67.

η) Ueber die Bestimmung des Flächeninhaltes der Dreyecke.

Der Flächeninhalt eines jeden Dreyeckes ist dem halben Produkte aus seiner Grundlinie und Höhe gleich.

Beweis: (Fig. 37). Bezeichnet man die Grundlinie AG = B und die Höhe CD = H, so ist

$$Th)\quad \triangle\, ACG = \frac{B\,.\,H}{2}$$

D) Da nach §. 127 des 1ten Theiles Messen nichts anderes heißt, als den Gehalt einer gegebenen Größe dadurch ausdrücken, daß man angibt, wie oft dieselbe eine, als allgemein angenommene relative Einheit (Maas) in sich enthält, so heißt den Flächeninhalt einer Ebene berechnen nichts anderes, als untersuchen, wie oft die gebräuchliche Maaseinheit (der Quadratfuß, §. 132 des 1ten Theiles) in ihr enthalten ist.

Man bezeichne die Grundlinie ag eines Quadratfußes mit b und dessen Höhe ac mit h, und ziehe cg, so ist △ acg die Hälfte des Quadratfußes, weil △ acg ≅ △ cgd ist,

$$\text{denn}\quad \left.\begin{array}{l} ag = cd = 1' \\ ac = dg = 1' \end{array}\right\}\ (\text{§. 132. 1ten Theil})$$

$$\text{und}\quad cg = cg = cg.$$

Es ist aber △ acg : △ ACG = b . h : B . H (§. 65).

Da der Quadratfuß als die Maaseinheit gleich $1^{\square'}$ ist, so ist △ acg = $\frac{1}{2}^{\square'}$, und da auch b = 1' und h = 1' ist, (§. 132 des 1ten Th.), so erhält man $\frac{1}{2}^{\square'}$: △ ACG = 1 : B . H, woraus

$$\triangle\, ACG = \frac{B\,.\,H}{2}\ \text{folgt.}$$

Zusätze:

1) Der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreyeckes ist dem halben Produkte aus den beyden Katheten gleich. (§. 48. Zus. 3.)

2) Mehrere Dreyecke von gleicher Höhe sind zusammen einem einzigen Dreyecke von derselben Höhe gleich, welches die Summe der Grundlinien aller gegebe-

nen Dreyecke zur eigenen Grundlinie hat; d. h.

(Fig. 34) $\triangle ABC + \triangle DEF = \frac{(AC + DF) H}{2}$;

denn $\triangle ABC : \triangle DEF = AC : DF$ (§. 63) woraus nach §. 320 Satz 7 des 1ten Theils

$\triangle ABC + \triangle DEF : \triangle DEF = AC + DF : DF.$

Nun ist $\triangle DEF = \frac{DF . H}{2}$ (Lehrsatz), folglich

$\triangle ABC + \triangle DEF : \frac{DF \times H}{2} = AC + DF : DF$

oder $\triangle ABC + \triangle DEF : \frac{H}{2} = AC + DF : 1$ (§. 320 1ter Thl.), woraus

$$\triangle ABC + \triangle DEF = \frac{(AC + DF) H}{2} \text{ ist.}$$

B.

Die Vierecke.

§. 68.

a) Vorbegriffe.

α) Erklärungen.

Ein Viereck (tetragonum, τετράγωνον) ist eine von vier Linien (Seiten) begränzte Ebene. Unter den Seiten werden hier ebenfalls nur gerade Linien verstanden.

§. 69.

Man bezeichnet ein Viereck durch die, an den 4 Winkeln stehenden Buchstaben, oder, wenn man sich kürzer ausdrücken will, und dadurch keine Zweydeutigkeit entsteht, nur durch die zwey Buchstaben der sich entgegenstehenden Winkel.

§. 70.

Ein Viereck, in welchem die zwey, sich gegenüberstehenden Seiten parallel sind, heißt ein Parallelogramm (Parallelogrammus, παραλληλόγραμμος) Fig. 38. AC. Sind nur 2 Seiten einander parallel, so heißt das Viereck ein Trapez (Trapezus, τραπέζους) Fig. 39. AC. Ist aber keine Seite des Vierecks zu einer andern parallel, so heißt es ein Trapezoid oder Trapezoides (τραπεζοείδης) Fig. 40. AC.

§. 71.

β) Postulat.

Jede Diagonale in einem Vierecke theilt dasselbe in 2 Dreyecke. Fig. 38, 39 u. 40.

Zusätze:

1) In einem jeden Vierecke sind nur 2 Diagonalen möglich.

2) In einem jeden Vierecke beträgt die Summe aller 4 Winkel zusammen 4 R; denn, da ein jedes Viereck durch die Dioganale in 2 Dreyecke getheilt wird (Post.), und die Winkel in jedem derselben 2R halten (§. 54), so haben alle Winkel in den beyden Dreyecken oder in dem Vierecke zusammen 4 R.

3) Durch zwey an einander stossende Seiten und die 3, an denselben liegenden Winkel ist ein Viereck vollkommen bestimmt, Denn ist z. B. (Fig. 40) AB, AD, ABC, BAD und ADC bestimmt, so ist durch AB, AD und BAD nach §. 49. Zus. 6 das △ ABD, folglich auch die Diagonale BD und die Lage der Winkel m, n, x, y bekannt, wodurch nach §. 51 Zus. 1 auch das △ BCD und mithin das ganze Viereck bestimmt ist.

4) Durch 3 Seiten und die beyden eingeschlossenen Winkel ist ein Viereck vollkommen bestimmt. Denn es

sey z. B. (Fig. 40) AB, AD, DC, BAD u. ADC der Lage nach gegeben, so ist es auch das △ BAD durch AB, AD und BAD (§. 49. Zus. 6), und hieraus die Diagonale und n und y. Nun ist durch BD, CD und y die Lage des △ BCD bestimmt (§. 49. Zus. 6), folglich ist es auch jene des ganzen Viereckes.

5) Durch alle 4 Seiten und einen der Winkel ist ein Viereck vollkommen bestimmt. Denn ist z. B. (Fig. 40) AB, AD, CD, BC, und BAD bestimmt, so ist es durch AB, AD und BAD das △ ABD (§. 49. Zus. 6), folglich auch BD; da durch BD, BC und CD auch das △ BCD bestimmt ist (§. 50. Zus. 1), so ist es das Viereck selbst.

6) Durch alle 4 Seiten und eine Diagonale ist ein Viereck vollkommen bestimmt; denn dadurch sind in jedem der 2 Dreyecke alle Seiten, also nach §. 50. Zus. 1 die Dreyecke selbst, und mithin das ganze Viereck bestimmt.

7) Zwey Vierecke sind daher congruent, wenn entweder: 2 anstossende Seiten und die 3 an ihnen liegenden Winkel, oder 3 Seiten und die 2 eingeschlossenen Winkel; oder alle 4 Seiten und 1 Winkel, oder alle 4 Seiten und 1 Diagonale sich gegenseitig gleich sind.

§. 72.

b) Die Parallelogramme.

α) Erklärungen.

Ein Parallelogramm (§. 70), das aus 4 gleichen Winkeln und 4 gleichen Seiten besteht, folglich ein reguläres Viereck ist (§. 38), heißt ein Quadrat (quadratum) Fig. 41. Sind in einem Parallelogramme alle 4 Winkel, von den Seiten aber nur 2 und 2 einander gleich, so wird es

ein **Rechteck** (rectangulum) genannt Fig. 42. Sind in einem Parallelogramme zwar alle 4 Seiten, von den Winkeln aber nur 2 und 2 einander gleich, so heißt es eine **Raute** oder ein **Rhombus** (rhombus, ῥόμβος) Fig. 43. Sind in einem Parallelogramme nur 2 und 2 Winkel, und 2 und 2 Seiten einander gleich (Fig. 44), so heißt dasselbe eine **längliche Raute** oder ein **Rhomboid** (rhomboides, ῥομβοειδής).

§. 73.

Diejenige Senkrechte, welche man sich in einem Parallelogramme zwischen zwey, sich gegenüberstehenden Parallellinien gezogen denkt, gibt die **Höhe** des Parallelogrammes an, und die eine dieser Parallelen heißt sodann die **Grundlinie**.

§. 74.

β) **Postulat.**

Parallelogramme, welche so zwischen 2 Parallellinien liegen, daß sich die Grundlinien in der einen, und die, denselben gegenüberstehenden Seiten in der anderen Parallele befinden, haben gleiche Höhen. (§. 73.)

Zusatz: Parallelogramme und Dreyecke zwischen 2 Parallellinien haben gleiche Höhen.

§. 75.

γ) **Lehrsätze.**

1) Ueber die Lage und Größe gerader Linien und Winkel in Parallelogrammen.

In einem jeden Parallelogramme sind die gegenüberstehenden Seiten einander gleich.

Beweis: (Fig. 44.)

Th) $AB = CD$ und $AD = BC$

D) $AB \# CD$ und $AD \# BC$ (§. 70).

Es liegen demnach Parallellinien zwischen Parallellinien, woraus folgt, daß dieselben sich gleich sind (§. 51. Zus. 5), nehmlich:

AB = CD und AD = BC.

Zusätze:

1) Wenn in einem Vierecke die gegenüberstehenden Seiten einander gleich sind, so ist dasselbe ein Parallelogramm.

2) Jede Diagonale theilt das Parallelogramm in 2 congruente Dreyecke, denn (Fig. 45) ist

AD = BC } vermöge Lehrsatz
AB = CD }
BD = BD

mithin △ ABD ≌ △ BCD (§. 50).

3) In jedem Parallelogramme sind die gegenüberstehenden Winkel einander gleich; denn aus der Congruenz der Dreyecke ABD und BCD folgt, daß x = y. Zöge man die Diagonale AC, so wäre ebenso auch

ADC = ABC.

4) In jedem Parallelogramme haben die beyden, an einer Seite liegenden Winkel zusammen zwey Rechte, d. h. (Fig 44) ABC + BCD = 2R (§. 29 u. §. 31 Zusatz). Es ist daher die Summe aller 4 Winkel im Parallelogramme gleich 4R.

5) Sind die beyden an einer Seite liegenden Winkel eines Parallelogrammes einander gleich, so ist jeder davon ein Rechter (Zus. 4).

6) Ist in einem Parallelogramme ein Winkel ein Rechter, so sind es auch die übrigen. (Zus. 3 u. 5.)

7) Im Quadrate und Rechtecke ist jeder Winkel ein Rechter (§. 72 und Zus. 5. u. 6 in diesem §).

8) Jedes Dreyeck ist die Hälfte eines Parallelogrammes, das mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat (Zus. 2).

9) Durch 2 Seiten und den eingeschlossenen Winkel ist ein Parallelogramm im allgemeinen vollkommen bestimmt (Lehrsatz u. §. 71. Zus. 3, 4, 5).

10) Ein Quadrat ist durch eine Seite, ein Rechteck durch 2 Seiten, ein Rhombus durch einen Winkel und eine Seite, und ein Rhomboid durch 2 Seiten und den eingeschlossenen Winkel vollkommen bestimmt (Zus. 9).

11) Quadrate sind einander congruent, wenn sie eine Seite, Rechtecke, wenn sie 2 Seiten, Rhombuse, wenn sie einen Winkel und eine Seite, und Rhomboide, wenn sie 2 Seiten und den eingeschlossenen Winkel gleich haben (Zus. 10).

12) Im Quadrate und im Rechtecke sind die beyden Diagonalen einander gleich, weil die, dadurch entstehenden Dreyecke sich congruent seyn müssen (Lehrs. dann Zus. 7 u. §. 49).

13) Durch eine jede Diagonale im Quadrate werden die zwey, sich gegenüberstehenden Winkel halbirt, d. h. jeder ist gleich $\frac{1}{2}$ R = 45°; denn (Fig. 45) ist

$q = p$ (§. 49. Zus. 3) und
$p = z$ (§. 29)

also $q = z$.

14) In einem Quadrate (Fig. 45) durchschneiden sich die zwey Diagonalen immer unter einem rechten Winkel; denn da $q = z$ (Zus. 13) und $AB = AE$ (§. 72), so ist $y = n = R$ (§. 56. Zus. 4).

15) Die 2 Diagonalen in einem Quadrate halbiren sich gegenseitig (Zus. 14 u. §. 56).

§. 76.

2) Ueber die Gleichheit der Parallelogramme.

I. Parallelogramme, welche gleiche Grundlinien und Höhen haben, sind einander gleich.

Beweis: (Fig. 46).

Th) BC = FG

D) BD = FH und AG # BH, weil sie zwischen 2 Parallellinien liegen. (§. 74.)

Man ziehe die Diagonalen AD und EH, so ist

△ ABD = $\frac{1}{2}$ BC und

△ EFH = $\frac{1}{2}$ FG (§. 75. Zus. 2).

Nun ist △ ABD = △ EFH (§. 52. Zus. 1), also auch $\frac{1}{2}$ BC = $\frac{1}{2}$ FG und mithin BC = FG.

Zusätze:

1) Jedes Quadrat ist einem Rhombus gleich, das mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat.
2) Jedes Rechteck ist einem Rhomboide gleich, das mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat.

§. 77.

II. Wenn man in einem Parallelogramme eine Diagonale, und durch einen beliebigen Punkt in derselben zu den Seiten des Parallelogrammes Parallelinien zieht, so entstehen 4 kleinere Parallelogramme, von welchen diejenigen, durch welche die Diagonale nicht geht, einander gleich sind.

Beweis: (Fig. 47).

Th) GH = DE

D) AD # HJ # BC und AB # FG # CD.

Es ist △ GCE ≌ △ JCE
und △ AHE ≌ △ AEF } (§. 75. Zus. 2)

---

also auch △ GCE + △ AHE = △ JCE + △ AEF.

Ferners ist auch $\triangle$ ABC $\cong$ $\triangle$ ACD; subtrahirt man davon $\triangle$ GCE + $\triangle$ AHE = $\triangle$ JCE + $\triangle$ AEF

$$\begin{array}{cccc} - & - & - & - \\ \hline \end{array}$$

so erhält man GH = DE.

Zusätze:

1) Ist das gegebene Parallelogramm ein Quadrat oder ein Rechteck, so sind die 2 Parallelogramme, durch welche die Diagonale nicht geht, Rechtecke, von welchen BG und GC Seiten sind.

2) Ist das gegebene Parallelogramm ein Rhombus oder ein Rhomboid, so sind die 2 Parallelogramme, durch welche die Diagonale nicht geht, ebenfalls Rauten, wovon BG und GC Seiten sind.

3) Diejenigen Parallelogramme, welche von der Diagonale durchschnitten werden, sind unter sich, und mit dem Ganzen ähnlich; denn (Fig. 47) ist

$x = p = y$ (§. 29 u. §. 26)

$m = n = n$ (§. 29),

also ist $\triangle$ AEF $\sim$ $\triangle$ ABC $\sim$ $\triangle$ GEC (§. 60).

Nun ist $\triangle$ AEF = $\frac{1}{2}$ HF, $\triangle$ ABC = $\frac{1}{2}$ BD und $\triangle$ GEC = $\frac{1}{2}$ GJ (§. 75. Zus. 8), folglich ist auch $\frac{1}{2}$ HF $\sim$ $\frac{1}{2}$ BD $\sim$ $\frac{1}{2}$ GJ und endlich

HF $\sim$ BD $\sim$ GJ.

4) Wenn die beyden Parallellinien gerade durch die Mitte der Diagonale gehen, so sind alle 4 Parallelogramme einander congruent; denn (Fig. 48) ist

DG = BG, $x = y$ (§. 26), und

$m = n$ (§. 29), also

$\triangle$ DEG $\cong$ $\triangle$ BFG (§. 51), folglich auch

EJ $\cong$ FH (§. 75. Zus. 8).

Ferners ist

$$\left.\begin{array}{l} BF = HG = GJ \\ FG = EG = DJ \end{array}\right\} \text{(§. 75 und weil } EJ \cong FH\text{)}$$

$z = q = p$ (§. 29)

---

also $HF \cong AG \cong EJ$ (§. 75. Zus. 9).

Endlich ist auch $ED = GJ$ (§. 75)

$EG = GF$ (weil $EJ \cong FH$)

und $v = o$ (§. 29)

---

also $EJ \cong GC$ (§. 75. Zus. 9),

mithin ist $AG \cong HF \cong EJ \cong GC$.

§. 78.

3) Ueber die Vergleichung der Parallelogramme unter sich.

I. Parallelogramme mit gleichen Höhen verhalten sich zu einander, wie ihre Grundlinien.

Beweis: (Fig. 49).

Th) $BD : FH = AD : EH$

D) $CJ = GK$.

Man ziehe die Diagonalen AC und EG, so erhält man

$$\triangle ACD : \triangle EGH = AD : EH.$$

Nun ist $\triangle ACD = \frac{1}{2} BD$ und

$\triangle EGH = \frac{1}{2} FH$ (§. 75. Zus. 8),

also auch $\frac{1}{2} BD : \frac{1}{2} FH = AD : EH$ oder

$$BD : FH = AD : EH.$$

§. 79.

II. Parallelogramme mit gleichen Grundlinien verhalten sich wie ihre Höhen.

Beweis: (Fig 50).

Th) $BD : FH = CJ : FK$

D) $AD = EH$.

Man ziehe AC und EG, so ist

$\triangle$ ACD : $\triangle$ EGH = CJ : FK (§. 64) oder

$\frac{1}{2}$ BD : $\frac{1}{2}$ FH = CJ : FK (§. 75. Zus. 8),

und also auch BD : FH = CJ : FK.

Zusatz: Rechtecke mit einer gleichen Seite verhalten sich ebenso, wie die 2 daran anstossenden Seiten; denn man darf nur die 2 gleichen Seiten als die Grundlinien und die 2 daran anstossenden ungleichen Seiten als die Höhenlinien der Rechtecke betrachten.

§. 80.

III. Alle Parallelogramme verhalten sich zu einander, wie die Produkte aus ihren Grundlinien und Höhen.

Beweis: (Fig. 51).

Th) BD : FH = AD . CJ : EH . FK

D) Man ziehe AC und EG, so ist

$\triangle$ ACD : $\triangle$ EGH = AD . CJ : EH . FK (§. 65),

oder $\frac{1}{2}$ BD : $\frac{1}{2}$ FH = AD . CJ : EH . FK (§. 75. Zus. 8)

und auch BD : FH = AD . CJ : EH . FK.

Zusätze:

1) Alle Rechtecke verhalten sich zu einander, wie die Produkte zweyer anstossenden Seiten.

2) Parallelogramme, in welchen die Produkte aus den Grundlinien und Höhen einander gleich sind, sind ebenfalls gleich; denn ist AD . CJ = EH . FK, so ist auch BD = FH. (Man sehe dazu den Beweis des Lehrsatzes).

§. 81.

IV. Aehnliche Parallelogramme verhalten sich zu einander ebenso, wie die Quadrate zweyer gleichliegenden Seiten.

Beweis: Da jedes Dreyeck die Hälfte eines Parallelogrammes mit derselben Grundlinie und Höhe ist (§. 75. Zus. 8) und sich ähnliche Dreyecke zueinander verhalten, wie die Quadrate zweyer gleichliegenden Seiten (§. 66), so gilt dieses auch von ähnlichen Parallelogrammen; denn was von den Hälften gilt, gilt auch von den Ganzen.

§. 82.

4) Ueber die Bestimmung des Flächeninhaltes der Parallelogramme.

Der Flächeninhalt eines Parallelogrammes ist dem Produkte aus seiner Grundlinie und Höhe gleich.

Beweis: (Fig. 38). Setzt man die Grundlinie AD = b und die Höhe CE = h, so ist

Th) $AC = b \,.\, h$

D) Man ziehe die Diagonale BD, so ist

$$\triangle ABD = \frac{b \,.\, h}{2} \text{ (§. 67). Nun ist}$$

$$\triangle ABD = \tfrac{1}{2} AC \text{ (§. 75. Zus. 8), also ist auch}$$

$$\tfrac{1}{2} AC = \frac{b \,.\, h}{2} \text{ und demnach } AC = b.h.$$

Zusätze:

1) Der Flächeninhalt eines Quadrates ist dem Quadrate aus einer Seite gleich; denn hier ist b = h (§. 72) also (Fig. 41) $AC = b^2$.

2) Der Flächeninhalt eines Rechteckes ist dem Produkte aus der Länge und Breite, oder aus zwey anstossenden Seiten gleich.

3) Mehrere Parallelogramme von gleicher Höhe sind zusammen einem einzigen von derselben Höhe gleich, welches die Summe der Grundlinien aller gegebenen Parallelogramme zur eigenen Grundlinie hat;

d. h. (Fig. 46) BC + FG = (BD + FH) h, wenn h die gemeinschaftliche Höhe bedeutet.

§. 83.

c) Die Trapeze.

Lehrsätze.

1) Ueber die Lage und Größe gerader Linien in Trapezen.

I. Ein jedes Trapez wird durch die Diagonale in zwey ungleiche Dreyecke getheilt.

Beweis: (Fig. 39). Da die 2 Dreyecke ABD und BCD zwar einerley Höhe BE, aber an den Seiten AD u. BC ungleiche Grundlinien haben, weil nur Parallelen zwischen Parallelen gleich seyn können (§. 51. Zus. 5), so kann auch nicht AD . BE = BC . BE seyn, woraus folgt, daß unmöglich $\triangle$ ABD = $\triangle$ BCD seyn kann (§. 65. Zus.).

Zusatz: Wenn man ein Trapez durch eine Diagonale in 2 Dreyecke theilt, so ist von denselben jenes das größere, welches die größere der Parallelen zu seiner Grundlinie hat; denn $\triangle ABD = \frac{AD \cdot BE}{2}$ und $\triangle BCD = \frac{BC \cdot BE}{2}$ (§. 67); ist nun AD > BC, so ist auch $\triangle$ ABD > $\triangle$ BCD.

§. 84.

II. Eine gerade Linie, welche in einem Trapeze die nicht parallelen Seiten halbirt, ist der halben Summe der parallelen Seiten gleich.

Beweis: (Fig 52.)

Th) $EF = \frac{BC + AD}{2}$

D) $AE = BE = \frac{1}{2} AB$, $DF = CF = \frac{1}{2} CD$.

Man verlängere AB und CD bis sie sich in G schneiden, so entsteht das $\triangle$ ADG, in welchem BC # EF # AD

ist (§. 57. Zus. 1 u. 2). Nun ziehe man die Diagonale AC, so ist in $\triangle$ ABC nach §. 58, EH : BC = AE : AB. Weil aber AE = $\frac{1}{2}$ AB ist, so ist auch EH = $\frac{1}{2}$ BC. Ebenso erhält man auch HF = $\frac{1}{2}$ AD; folglich

$$EH + HF = \tfrac{1}{2} BC + \tfrac{1}{2} AD \text{ oder}$$

$$EF = \frac{BC + AD}{2}.$$

§. 85.

2) Ueber die Gleichheit der Trapeze.

Zwey Trapeze, welche sowohl eine der nicht parallelen Seiten als auch die zwey, derselben gegenüberstehenden Winkel gleich haben, und so zwischen zwey Parallelinien liegen, daß die zwey gleichen Seiten in der einen, und die Scheitel von zwey gleichen Winkeln in der anderen Parallele sich befinden, sind einander gleich.

Beweis: (Fig. 53.) Um dieses zu beweisen denke man sich das Trapez ABCD als gegeben; in demselben verlängere man AD, ebenso auch BC bis es die Verlängerung von AD in E trifft, und CD bis es die, zu AG parallele Linie BH in F schneidet; endlich ziehe man durch F die Linie FG parallel zu BE, so entsteht ein zweytes Trapez CEGF, welches die erwähnten Eigenschaften hat.

Th) *Trap.* ABCD = *Trap.* CEGF

D) AG # BH, AD = BF = EG (§. 75)
m = n und o = p (§. 29 u. 26).

Da AG # BH, so ist AF = BG (§. 76)
und weil — $\triangle$ BCF = — $\triangle$ BCF

so ist AF — $\triangle$ BCF = BG — $\triangle$ BCF
nehmlich *Trap.* ABCD = *Trap.* CEGF.

§. 86.

3) Ueber die Bestimmung des Flächeninhalts der Trapeze.

Der Flächeninhalt eines Trapezes ist dem halben Produkte aus der Summe der zwey parallelen Seiten mit ihrem senkrechten Abstande von einander gleich.

Beweis: (Fig. 39).

Th) $Trap. = \frac{(AD + BC)BE}{2}$

D) Man ziehe die Diagonale BD, so entstehen zwey Dreyecke und

$$Trap. = \triangle ABD + \triangle BCD$$
$$= \frac{AD . BE}{2} + \frac{BC . BE}{2} \quad (§. 67)$$
$$= \frac{(AD + BC)BE}{2}.$$

Zusatz. Mehrere Trapeze von gleicher Höhe (wenn man den senkrechten Abstand der beyden parallelen Seiten als die Höhe betrachtet) sind einem einzigen von derselben Höhe gleich, welches die Summe aller Grundlinien zu seiner eigenen Grundlinie, und die Summe aller, zu den Grundlinien parallelen, Seiten zu dieser Parallelen hat; d. h. (Fig. 54)

$$ABCD + EFGH = \frac{(AB + EF + CD + GH)h}{2},$$ wenn

CJ = BD = GK = h (die Höhe) ist; denn zieht man noch die Höhenlinie HL, so erhält man die Parallelogramme DJ und HK, welche nach §. 82 Zus. 3 gleich (BJ + KL) h, und die Dreyecke ACJ, EGK u. FHL, welche nach §. 67 Zus. 2 gleich $\frac{(AJ + EK + FL)h}{2}$. Diese nun zusammen addirt geben die beyden Trapeze, nehmlich:

$$ABCD + EFGH = \frac{(2BJ + 2KL)h + (AJ + EK + FL)h}{2} =$$

$$= \frac{(AJ + BJ + EK + KL + FL + CD + GH)h}{2}$$ (weil BJ = CD und KL = GH) und endlich

$$= \frac{(AB + EF + CD + GH)h}{2}.$$

§. 87.

d) Die Trapezoide.

Lehrsatz.

Ueber die Bestimmung des Flächeninhalts.

Der Flächeninhalt eines Trapezoids ist gleich dem halben Produkte aus einer Diagonale mit der Summe ihrer Abstände von den zwey gegenüberstehenden Winkeln.

Beweis: (Fig. 40).

Th) *Trapezoid* $= \frac{BD(CF + AE)}{2}$.

D) Weil *Trapezoid* $= \triangle ABD + \triangle BCD$ ist, so ist es auch gleich $\frac{BD \cdot CF}{2} + \frac{BD \cdot AE}{2}$ oder $\frac{BD(CF + AE)}{2}$.

C.

Die Vielecke.

§. 88.

a) Erklärungen.

Ein Vieleck (Polygonum von πολυγώνιος) wird eine jede von mehr als vier geraden Linien begränzte Ebene genannt.

Die begränzenden Linien heißen die **Seiten**, und alle Seiten zusammen der **Umfang** oder **Perimeter** (von περίμετρος) des Vieleckes. Jeder Winkel am Umfange eines Vieleckes, der von zwey Seiten gebildet wird, heißt ein **Vielecks-** oder **Polygon-Winkel**. Dieselben können sowohl ein- als ausspringend seyn.

§. 89.

Ein Vieleck heißt insbesondere ein **Fünfeck**, wenn es 5, ein **Sechseck**, wenn es 6 Seiten hat u. s. w.

Ein Vieleck heißt **regulär**, wenn alle Polygonseiten und Polygonwinkel einander gleich sind; im Gegentheile aber **irregulär**. (§. 38.)

§. 90.

b) **Postulate.**

1) Jedes Vieleck hat so viele Winkel, als es Seiten begränzen; denn die erste Seite bildet mit der zweyten den ersten, die zweyte mit der dritten den zweyten, u. s. w. und die letzte Seite mit der ersten den letzten Winkel.

2) Ein jedes Vieleck kann durch Diagonalen in Dreyecke zerlegt werden.

Zusätze:

1) In einem jeden Vielecke beträgt die Anzahl aller möglichen Diagonalen von einem Winkel aus nach den übrigen eben so viel, als es Seiten hat, weniger 3.

2) Können diese Diagonalen von einem Winkel ausgehen, so erhält man eben so viele Dreyecke, als das Vieleck Seiten hat, weniger 2.

§. 91.

c) Lehsätze.

α) Ueber die Aehnlichkeit der Vielecke.

Vielecke sind einander ähnlich, wenn sie, bey gleicher Anzahl der Seiten, die gleichliegenden Winkel gleich haben und ihre gleichliegenden Seiten zu einander in Proportion stehen.

Beweis: (Fig. 55.)

Th) ABCDEFA ∽ GHJKLMG

D) $m = \alpha$, $n = \beta$, $x = \gamma$ u. s. w.

BC : HJ = CD : JK = DE : KL u. s. w.

Man zerlege die Vielecke von einem Winkel aus durch Diagonalen in Dreyecke, so ist △ ABC ∽ △ GHJ (§. 61 ad 1). Hieraus folgt BCA = HJG; da $n = \beta$, so ist ACD = GJK, und da auch AC : GJ = CD : JK (§. 60. Zus. 5 und vermöge *Dat.*), so ist

△ ACD ∽ △ GJK (§. 61 ad 1).

Aus denselben Gründen ist auch

△ ADE ∽ △ GKL und

△ AEF ∽ △ GLM.

Addirt man alle diese Dreyecke zusammen, so erhält man ABCDEFA ∽ GHIKLMG.

Zusätze:

1) In ähnlichen Vielecken sind die gleichliegenden Winkel einander gleich, und stehen gleichliegende Seiten zu einander in Proportion.

2) Aehnliche Vielecke werden durch gleichliegende Diagonalen in ähnliche Dreyecke zerlegt.

3) Gleichliegende Diagonalen verhalten sich in ähnlichen Vielecken ebenso wie gleichliegende Seiten. (Zus. 2.)

4) Alle regulären Vielecke von einerley Gattung sind einander ähnlich.

§. 92.

β) Ueber die Lage, Größe und Beschaffenheit gerader Linien und Winkel in Vielecken.

I. Bey ähnlichen Vielecken verhalten sich die Perimeter wie zwey gleichliegende Seiten oder Diagonalen.

Beweis: (Fig. 55).

Th) (AB + BC + CD + DE + EF + FA) : (GH + HJ + JK + KL + LM + MG) = AB : GH oder = AC : GJ.

D) ABCDEFA ∽ GHJKLMG, mithin ist nach §. 91 Zus. 1

AB : GH = AB : GH
BC : HJ = AB : GH
CD : JK = AB : GH
DE : KL = AB : GH
EF : LM = AB : GH
FA : MG = AB : GH folglich

(AB + BC + CD + DE + EF + FA) : (GH + HJ + IK + KL + LM + MG) = 5 AB : 5 GH = AB : GH, und nach §. 91 Zus. 3 auch gleich wie AC : GJ.

§. 93.

II. In einem jeden Vielecke beträgt die Summe aller Polygonwinkel, wenn sich darunter kein einspringender befindet, gerade so vielmal zwey Rechte, als die um 2 weniger angenommene Winkel- oder Seitenanzahl angibt.

Beweis: (Fig. 55.) Benennt man die Summe aller Polygonwinkel mit S, und die Seitenanzahl des Polygons mit n, so ist

Th) S = (n — 2) 2R.

Man ziehe von einem beliebigen Winkel aus nach den übrigen die Diagonalen, so entstehen nach §. 90 Zus. 2, (n — 2) Dreyecke. Da die Summe aller Winkel dieser Dreyecke, die Summe aller Polygonwinkel gibt, und in

jedem Dreyecke die 3 Winkel zusammen = 2R sind (§. 54), so ist die Summe der Winkel aller Dreyecke, oder jene der Polygonwinkel gleich (n — 2) 2R.

Zusätze:

1) Wendet man diesen Lehrsatz auf die verschiedenen Ebenen an, so erhält man

für jedes Dreyeck S = 2R (§. 54)
" " Viereck S = 4R (§. 71. Zus. 2)
" " Fünfeck S = 6R.
" " Sechseck S = 8R

. . . .

2) In allen gleichnamigen geradelinigen Vielecken ist die Summe aller Polygonwinkel dieselbe.

3) In einer jeden regulären geradlinigen Ebene ist jeder Polygonwinkel

$$x = \frac{s}{n} = \frac{(n-2)\,2R}{n} = \frac{2nR - 4R}{n} = \left(2 - \frac{4}{n}\right)R.$$

Es ist demnach der Polygonwinkel eines

regulären Dreyeckes = 60° (§. 54. Zus. 4)
" " Viereckes = 90° (§. 75. Zus. 7)
" " Fünfeckes = 108°
" " Sechseckes = 120° u. s. w.

§. 94.

III. Wenn man sich aus der Mitte zweyer Seiten eines regulären Vieleckes senkrechte Linien errichtet denkt, so ist dort, wo sich dieselben schneiden, der Mittelpunkt des Vieleckes, d. h. alle Polygonwinkel, so wie alle Polygonseiten sind von diesem Durchschnittspunkte unter sich gleich weit entfernt.

Beweis: (Fig. 56).

Th) CD = CE, AC = BC

D) AD = AE, x = y = R. Da auch AC = AC, so ist △ ACD ≌ △ ACE (§. 49 ad 1), also CD = CE.

Ferners ist AD = DB (verm. *Dat.*), CD = CD und x = m = R, folglich △ ACD ≌ △ DCB (§. 49 ad 2), also AC = BC.

Zusätze:

1) Wenn man vom Polygonmittelpunkte nach allen Polygonwinkeln gerade Linien zieht, so entstehen ebenso viele congruente Dreyecke, als das Polygon Seiten hat, und die Polygonwinkel werden dann dadurch halbirt (verm. Bew.).

2) Jeder Dreyeckwinkel am Polygonmittelpunkte hat demnach, wenn man die Seitenanzahl mit n bezeichnet, $\frac{4R}{n}$ Grade (Zus. 1 u. §. 25 Zus.).

3) Jedes reguläre Polygon ist einem Dreyecke gleich, dessen Grundlinie der Perimeter des Polygons, und dessen Höhe diejenige Senkrechte ist, welche den Abstand einer Polygonseite vom Polygonmittelpunkte angibt (§. 67. Zus. 2).

4) In gleichnamigen regulären Vielecken sind die Dreyecke, welche dadurch entstehen, wenn man vom Polygonmittelpunkte an alle Polygonwinkel gerade Linien zieht, einander ähnlich; denn (Fig. 74) ist

$$\left.\begin{array}{r} n = o \\ \text{und} \quad x = m \end{array}\right\} \text{ (§. 89 u. Zus. 1 in diesem §.)}$$

folglich △ ABC ∼ △ HJM (§. 60).

§. 95.

γ) Ueber die Vergleichung der Vielecke unter sich.

Aehnliche Vielecke verhalten sich zu einander, wie die Quadrate zweyer gleichliegenden Seiten oder Diagonalen.

Beweis: (Fig. 55).

Th) Polyg. ABCDEFA : *Polyg.* GHJKLMG =
= $AB^2 : GH^2 = AC^2 : GJ^2$

D) Polyg. ABCDEFA ∽ *Polyg.* GHJKLMG.

Theilt man die Polygone durch gleichliegende Diagonallinien in gleichliegende Dreyecke, so sind die letzteren ähnlich, (§. 91. Zus. 2), und folglich

$\triangle ABC : \triangle GHJ = AB^2 : GH^2 = AC^2 : GJ^2$ (§. 66)

$\left.\begin{array}{l} \triangle ACD : \triangle GJK = AB^2 : GH^2 = AC^2 : GJ^2 \\ \triangle ADE : \triangle GKL = AB^2 : GH^2 = AC^2 : GJ^2 \\ \triangle AEF : \triangle GLM = AB^2 : GH^2 = AC^2 : GJ^2 \end{array}\right\}$ (§. 66 u. §. 91. Zus. 3.)

$(\triangle BAC + \triangle ACD + \triangle ADE + \triangle AEF) : (\triangle GHJ + \triangle GJK + \triangle KLG + \triangle GLM) = 4AB^2 : 4GH^2 = 4AC^2 : 4GJ^2$

oder *Polyg.* ABCDEFA : *Polyg.* GHJKLMG =
= $AB^2 : GH^2 = AC^2 : GJ^2$.

Zusatz: Alle gleichnamigen regulären Polygone verhalten sich zu einander, wie die Quadrate zweyer gleichliegenden Seiten oder Diagonalen (§. 91 Zus. 4 und Lehrs. in diesem §.).

§. 96.

δ) Ueber die Bestimmung des Flächeninhaltes der Vielecke.

I. Der Flächeninhalt eines jeden regulären Polygons ist dem halben Produkte aus seinem Perimeter mit dem senkrechten Abstande einer Polygonseite vom Polygonmittelpunkte gleich.

Beweis: (Fig. 56).

$$Th)\ Polyg. = \frac{Perim.\ \text{EDFGHE} \times \text{AC}}{2}$$

Dat. DE = DF = FG = GH = EH.

Man theile das Polygon vom Mittelpunkte aus in Dreyecke, so ist

$$Polyg. = 5 \times \triangle\ \text{DEC}\ (\S.\ 94.\ \text{Zus. } 1)$$

$$= \frac{5 \times \text{DE} \times \text{AC}}{2}\ (\S.\ 67) =$$

$$= \frac{(\text{DE} + \text{DF} + \text{FG} + \text{GH} + \text{EH})\,\text{AC}}{2} =$$

$$= \frac{Perim.\ \text{EDFGHE} \times \text{AC}}{2}.$$

Zusatz: Alle regulären Polygone verhalten sich zu einander, wie die Produkte aus den Perimetern mit den Abständen der Polygonseiten von den Polygonmittelpunkten; denn (Fig. 57) ist

$$Polyg.\ \text{ABCDEA} : Polyg.\ \text{HJKLMNH} =$$

$$\frac{(Perim.\ \text{ABCDEA})\,\text{FG}}{2} : \frac{(Perim.\ \text{HJKLMNH})\,\text{OP}}{2}$$

(Lehrsatz und §. 40 Post. 4) oder

$$= Perim.\ \text{ABCDEA} \times \text{AG} : Perim.\ \text{HJKLMNH} \times \text{OP}.$$

§. 97.

II. Der Flächeninhalt eines jeden irregulären Polygons ist der Summe aus allen Dreyecken gleich, welche durch Diagonalen, die sich nicht schneiden, entstehen.

Beweis: Man theile das Polygon durch Diagonalen, welche sich nicht schneiden, in Dreyecke, (§. 90. Post. 2), und berechne jedes derselben einzeln, so gibt die Summe dieser Dreyecke den Flächeninhalt des Polygons (1ter Theil, Grunds. 4).

D.

Der Kreis.

§. 98.

a) Erklärungen.

Der Kreis (circulus) ist eine, von einer Kreislinie begränzte, Ebene (Fig. 58). Die Gränze heißt der Umkreis (circumfererentia) oder die Peripherie des Kreises (peripheria, περιφερεία). Ein jeder Theil der Peripherie heißt ein Kreisbogen (arcus).

§. 99.

Derjenige Punkt, welcher innerhalb einer Kreisebene von allen Punkten der Peripherie gleich weit absteht (Fig. 58, C) heißt der Mittelpunkt oder das Centrum (centrum, κέντρον), und die gerade Linie AC, vom Mittelpunkte an einen beliebigen Punkt der Peripherie gezogen, der Halbmesser oder Radius (radius) des Kreises; man bezeichnet denselben gewöhnlich mit r. Jede gerade Linie AB, von einem beliebigen Punkte der Peripherie bis zu einem anderen in derselben, heißt eine Sehne oder Chorde (chorda, χορδη), und wenn selbe durch den Mittelpunkt geht, wie BD, insbesondere der Durchmesser oder Diameter (diametros, διαμετρος) des Kreises; man bezeichnet ihn gewöhnlich mit d. Diejenige gerade Linie, wie z. B. EF, welche die Peripherie nur in einem Punkte B berührt, übrigens aber ganz außerhalb des Kreises sich befindet, heißt eine Berührungslinie oder Tangente (von tango, ταγω), und der Punkt B ist der Berührungspunkt. Verlängert man eine Sehne über den Kreis hinaus, so nennt man selbe eine Sekante (von seco) z. B. BG.

§. 100.

Man nennt jenen Theil eines Kreises, welcher sich zwischen einer Sehne und dem dazu gehörigen Bogen befindet, wie z. B. AHB (Fig. 58) einen Kreisabschnitt oder ein Kreissegment (segmentum), und jenen, zwischen zwey Radien und dem dazwischenliegenden Bogen, wie z. B. ACDJ, einen Kreisausschnitt oder Kreissektor (sector). Haben zwey oder mehrere Kreise einen und denselben Mittelpunkt, so sagt man, sie sind concentrisch; haben hingegen zwey oder mehrere Kreise verschiedene Mittelpunkte, so heißen dieselben excentrisch. In letzterem Falle nennt man diejenige gerade Linie, welche die Mittelpunkte je zwey und zwey Kreise miteinander verbindet, die Centrallinie.

§. 101.

Ein Winkel, welcher seinen Scheitel im Mittelpunkte eines Kreises hat, heißt Centralwinkel (Fig. 58, x), so wie jener, welcher seinen Scheitel in der Peripherie eines Kreises hat, Peripheriewinkel genannt wird (Fig. 58, y).

§. 102.

b) Postulat.

Man kann aus einem jeden beliebigen Punkte mit einem jeden beliebigen Radius einen Kreis beschreiben.

Zusätze:

1) Alle Radien eines und desselben Kreises sind gleich groß (§. 12).
2) Jeder Diameter ist zweyen Radien gleich; d. h. $d = 2r$ (§. 99).
3) Alle congruenten Kreise haben gleiche Radien oder Diameter.
4) Alle Kreise mit gleichen Radien oder Diametern sind congruent.

5) Jeder Kreis wird durch seinen Diameter in zwey congruente Theile getheilt.

6) Zwey excentrische Kreise, bey welchen die Centrallinie kleiner ist, als die beyden Radien zusammengenommen, schneiden sich.

§. 103.

c) Lehrsätze.

α) Ueber die Lage, Größe und Beschaffenheit der Linien und Winkel an und in Kreisebenen.

I. Wenn man aus dem Mittelpunkte eines Kreises eine Senkrechte auf eine Sehne fällt, so wird dadurch sowohl die Sehne, als auch der Centralwinkel halbirt.

Beweis: (Fig. 59).

Th) AD = DB und x = y.

D) m = n = R, AC = BC (§. 101 Zus. 1) und CD = CD, folglich △ ADC ≅ △ BDC (§. 48), und daher AD = DB und x = y (§. 49 Zus. 1).

Zusätze:

1) Wenn man aus der Mitte einer Sehne auf dieselbe eine Senkrechte errichtet, so geht letztere durch den Mittelpunkt des Kreises, (§. 56 Zus. 3).

2) Eine gerade Linie, welche den Centralwinkel halbirt, theilt auch die dazu gehörige Sehne, so wie auch den entsprechenden Bogen, Aus- und Abschnitt in zwey gleiche Theile und steht auf der Sehne senkrecht (§. 56. Zus. 1, 2, 3).

§. 104.

II. Eine jede Tangente steht dort auf dem Radius senkrecht, wo derselbe mit dem Berührungspunkte zusammentrifft.

Beweis: (Fig. 58).

Th) CBE = CBF = R.

Unter allen geraden Linien, welche von C aus nach EF gezogen werden können, ist BC die kürzeste, weil eine jede andere über den Kreis hinausgeht und also größer als BC, der Radius des Kreises, seyn muß. Es ist demnach nach §. 14 Zus. 5 CBE = CBF = R.

Zusatz: Eine jede gerade Linie, welche dort auf dem Radius senkrecht steht, wo derselbe mit dem Berührungspunkte zusammentrifft, ist eine Tangente.

§. 105.

III. In einem Kreise gehören zu gleichen Sehnen auch gleiche Centralwinkel, Bögen, Aus- und Abschnitte.

Beweis: (Fig. 60).

Th) *arc.* AB = *arc.* CD, AMB = CMD,
sect. AMB = *sect.* CMD und
segm. AEB = *segm.* CFD.

D) AB = CD,
AM = CM
und BM = DM } (§. 102 Zus. 1)

mithin △ AMB ≌ △ CMD (§. 50) also
AMB = CMD (§. 49. Zus. 1).

Legt man nun das △ AMB so auf das △ CMD, daß M im Mittelpunkte bleibt, so fällt A auf C und B auf D, so wie auch die Bögen AB und CD in allen ihren Punkten auf einander fallen, weil dieselben alle gleich weit vom Mittelpunkte abstehen müssen (§. 12) folglich ist

arc. AB = *arc.* CD als auch
sect. AMB = *sect.* CMD und
segm. AEB = *segm.* CFD.

Zusätze:

1) In congruenten Kreisen gehören zu gleichen Sehnen auch gleiche Centralwinkel, Bögen, Aus- und Abschnitte (§. 102 Zus. 4).

2) In einem Kreise, oder in mehrern congruenten Kreisen sind gleiche Sehnen gleich weit vom Mittelpunkte entfernt, d. h. (Fig. 60) wenn AB = CD, so ist HM = GM, denn weil △ AMB ≌ △ CMD und AM = CM = BM = DM, so ist auch

$\frac{1}{2}$ △ AMB ≌ $\frac{1}{2}$ △ CMD oder

△ AHM ≌ △ CGM (§. 56. Zus. 1) woraus

HM = GM folgt.

3) Zwey Durchmesser eines Kreises, welche sich senkrecht durchschneiden, theilen die Peripherie sowohl, als die ganze Kreisebene in 4 congruente Theile (Quadrante, §. 12); denn durch die beyden senkrechten Durchmesser entstehen 4 rechtwinklige Centralwinkel, also 4 gleiche Ausschnitte.

§. 106.

IV. Jeder Centralwinkel ist doppelt so groß, als jeder, mit ihm auf gleichem Bogen ruhende, Peripheriewinkel.

Beweis: Hier können 3 Fälle statt finden, nehmlich: Entweder fällt der Mittelpunkt des Kreises, folglich der Scheitel des Centralwinkels in einen der Schenkeln, oder zwischen den Schenkeln, oder wohl auch außerhalb der Schenkeln des Peripheriewinkels.

ad 1) (Fig. 61.)

Th) x = 2y

D) AC = BC folglich n = y (§. 49 Zus. 3.)

Nun ist x = y + n (§. 55 Zus. 1) also ist x = 2y.

ad 2) (Fig. 62).

$$Th)\ ACB = 2\ ADB$$

D) Man ziehe den Diameter DE, so ist nach dem Vorhergehenden

$$m = 2x$$
$$\text{und}\quad n = 2y$$

$$\text{folglich}\ m + n = 2\ (x + y)$$
$$\text{oder}\ ACB = 2ADB.$$

ad 3) (Fig, 63).

$$Th)\quad x = 2y$$

D) Man ziehe den Diameter DE, so ist wie im ersten Falle $\acute{A}CE = 2ADE$

$$\text{und}\ n = 2m$$

$$\text{folglich}\ ACE - n = 2\ (ADE - m)$$
$$\text{oder}\qquad x = 2y$$

Zusätze:

1) Alle Peripheriewinkel, welche in einem Kreise auf demselben Bogen ruhen, sind gleich, weil jeder die Hälfte von einem und demselben Centralwinkel ist.

2) Alle Peripheriewinkel, welche in congruenten Kreisen auf gleichen Bögen ruhen, sind gleich, weil sie die Hälfte von gleichen Centralwinkeln sind (§. 105 Zus. 1).

3) Jeder Peripheriewinkel, dessen Schenkeln auf den Endpunkten des Diameters aufruhen, ist ein Rechter; denn es ist $x = \frac{1}{2}$ ACB (Fig. 64) $= \frac{1}{2} \times 2$ R (§. 20) $=$ R.

4) Wenn man von irgend einem Punkte der Peripherie eines Kreises eine Senkrechte auf den Diameter fällt, so ist dieselbe die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen den 2 abgeschnittenen Stücken des Diameters (Zus. 3 und §. 62 Zus. 1.)

§. 107.

V. Ein jeder Winkel, welcher an der Peripherie eines Kreises durch eine Sehne und eine Tangente entsteht, ist eben so groß, wie der Peripheriewinkel, welcher auf demjenigen Bogen ruht, der zwischen der Sehne und der Tangente liegt.

Beweis: (Fig. 65). AB sey die Sehne, CD die Tangente, so ist x der Peripheriewinkel, und man erhält:

Th) $y = x$

D) Man ziehe den Diameter B F und die Linie A F, so ist $y + m = R$ (§. 104)
$m + n = R$ (§. 106 Zus. 3 u. §. 54 Zus. 6)

daher $y + m = m + n$, also $y = n$, und da nach §. 106 Zus. 1 der Winkel $u = x$ ist, so ist endlich auch $y = x$.

§. 108.

VI. Ein jeder Winkel, welcher außerhalb eines Kreises durch zwey Sekanten gebildet wird, ist dem Unterschiede jener zwey Peripheriewinkel gleich, welche an den zwey Bögen ruhen, die die Sekanten zwischen sich abscheiden.

Beweis: (Fig. 66). Sind AB und CD die zwey Sekanten, so sind m und y die, zwischen ihnen liegenden Peripheriewinkeln, und man erhält:

Th) $x = m - y$

D) Weil nach §. 55 Zus. 1 der Winkel $m = x + y$ ist, so ist daraus $x = m - y$.

Zusatz; Ein jeder Winkel, welcher innerhalb eines Kreises durch zwey Sehnen gebildet wird, ist der Summe jener zwey Peripheriewinkel gleich, welche auf jenen zwey Bögen ruhen, die die Sehnen zwischen sich abschneiden, d. h. (Fig, 67) $x = m + y$ (§. 55 Zus. 1).

§. 109.

VII. Wenn sich zwey Sehnen schneiden, so bilden die Stücke von einer Sehne die äußern, und jene von der anderen Sehne die innern Glieder einer geometrischen Proportion.

Beweis: (Fig. 67).

Th) AE : CE = DE : BE

D) Man ziehe AC und BD, so erhält man n = z (§. 26) und m = o (106 Zus. 1), woraus △ ACE ∽ △ DEB folgt (§. 60) und hiemit AE : CE = DE : BE (§. 60 Zus. 5).

Zusatz: Schneidet eine Sekante eine Tangente, so ist letztere die mittlere geometrische Proportionale zwischen der ganzen Sekante und dem Stücke außerhalb des Kreises; nehmlich (Fig. 68) ist

AC : AB : AD;

denn zieht man BD und BC, so ist

m = n (§. 107)

x = x

also △ A BD ∽ △ ABC (§. 60.)

und AC : AB = AB : DA (§. 60 Zus. 5) oder

AC : AB : AD.

§. 110.

VIII. Wenn man die Peripherie eines Kreises in mehrere gleiche Theile theilet, und die neben einander liegenden Theilungspunkte durch Sehnen mit einander verbindet, so erhält man ein, im Kreise beschriebenes reguläres Polygon von eben so vielen Seiten, als die Peripherie gleiche Theile enthält.

Beweis: (Fig. 69.)

Th) AB = BC = CD = DE = AE
und x = y = z = m = n

D) *arc.* AB = BC = *arc.* CD = *arc.* DE = *arc.* AE.
Zu diesen gleichen Bögen gehören gleiche Sehnen (§. 105. Zus. 1), mithin

AB = BC = CD = DE = AE.

Zieht man ferners von allen Polygonwinkeln aus an den Mittelpunkt des Kreises gerade Linien, so sind dieselben alle Radien des Kreises, und es sind deßhalb alle entstehenden Dreyecke einander congruent (§. 50). Mithin ist das Polygon regulär (§. 94. Zus. 1) d. h.

x = y = z = m = n (§. 89).

Zusätze:

1) Der Mittelpunkt eines regulären Polygons ist zugleich auch der Mtttelpunkt des darum beschriebenen Kreises. (§. 94.)

2) Ein, um ein reguläres Polygone gezogener Kreis geht durch die Scheitel aller Polygonwinkel (Lehrs. und §. 94).

3) Da der Polygonmittelpunkt auch gleich weit von allen Polygonseiten absteht (§. 94), so muß eine, in einem regulären Polygon mit dem Abstande des Mittelpunktes von einer Polygonseite, beschriebene Kreislinie, jede Polygonseite in ihrem Halbierungspunkte berühren, d. h. die Polygonseiten sind Tangenten des innerhalb beschriebenen Kreises. (Fig. 69.)

4) Man kann sowohl um, als auch in jedes reguläre Polygon einen Kreis beschreiben; denn man darf nur (Fig. 69) zwey, an einer Seite liegende, Winkeln sich halbirt denken, so ist der Abstand eines Polygonwinkels vom Polygonmittelpunkte der Radius für den Kreis um das Polygon (§. 94. Zus. 1), und

der senkrechte Abstand einer Polygonseite vom Polygonmittelpunkte der Radius für den Kreis in das Polygon (§. 94).

5) Wenn man sich aus der Mitte zweyer zusammenstossenden geraden Linien AB und BD (Fig. 70) Senkrechte gezogen denkt, so ist der Durchschnittspunkt C dieser Senkrechten der Mittelpunkt eines Kreises, dessen Peripherie sowohl durch den Scheitel B des Winkels, als durch die zwey Endpunkte A und D der beyden Schenkeln geht (§. 103 Zus. 1).

§. 111.

IX. Die Seite eines regulären Sechseckes ist eben so groß, wie der Radius des darum beschriebenen Kreises.

Beweis: (Fig. 71.)

Th) $AB = AM$

D) Man ziehe BM, so ist $AM = BM$ (§. 102. Zus. 1), also $x = y$ (§. 49. Zus. 3).

Nach §. 94. Zus 2 ist $m = \frac{4R}{6} = \frac{2}{3}R$, also

$$x + y = 2R - \tfrac{2}{3}R \text{ (§. 54. Zus. 1)} = \tfrac{4}{3}R$$

$2x = \frac{4}{3}R$ und $x = \frac{2}{3}R$, folglich ist

$x = y = m$ also auch $AB = AM$ (§. 50. Zus. 2).

Zusätze:

1) Der Radius eines Kreises läßt sich auf der Peripherie sechsmal als Sehne herumtragen, und man erhält dadurch ein reguläres Sechseck.

2) Halbirt man den, zur Seite eines Sechseckes gehörigen Bogen, und zieht die Sehnen, so erhält man ein reguläres Zwölfeck, und fährt man mit diesem Verfahren fort, ein reguläres Vierundzwanzigeck, Achtundvierzigeck u. s. w. (§. 105.)

3) Zieht man aber in einem regulären Sechsecke die, zum doppelten Bogen gehörige Sehne, so erhält man ein reguläres Dreyeck (§. 105).

§. 112.

X. Der Unterschied zwischen dem halben Bogen und seiner Sehne ist kleiner, als der halbe Unterschied zwischen dem ganzen Bogen und der dazu gehörigen Sehne.

Beweis: (Fig. 71).

Th) $arc.\ AG - AG < \frac{1}{2}(arc.\ AB - AB)$

D) $arc.\ AG = \frac{1}{2}\ arc.\ AB.$

Da nun $AG = BG$ (§. 105) und $AG + BG > AB$ (§. 53), so ist $2AG > AB$ und $AG > \frac{1}{2}\ AB$. Subtrahirt man dieses von $arc.\ AG = \frac{1}{2} arc.\ AB$, so erhält man nach §. 22. Satz 4 des ersten Theiles

$$arc.\ AG - AG < \frac{1}{2}\ arc.\ AB - \frac{1}{2} AB$$

oder $arc.\ AG - AG < \frac{1}{2}(arc.\ AB - AB)$.

Zusätze:

1) Der Perimeter eines regulären Polygons von einer gewissen Anzahl Seiten weicht mehr von der Peripherie eines anderen regulären Polygons von noch einmal so vielen Seiten ab.

2) Da man nach §. 111. Zus. 2 die Verdoppelung der Seitenanzahl eines regulären Polygons ins Unendliche fortsetzen kann, so kann jeder Kreis als ein reguläres Polygon von unendlich vielen Seiten betrachtet werden.

3) Alle Kreise sind einander ähnlich (Zus. 2 und §. 91. Zus. 4).

4) Jeder Kreis ist einem Dreyecke gleich, welches die Peripherie des Kreises zur Grundlinie und den Radius zur Höhe hat (Zus. 2 und §. 94. Zus. 3).

5) Jeder Kreis-Sektor ist einem Dreyecke gleich, welches zur Grundlinie den Bogen des Sektors und zur Höhe den Radius des Kreises hat (Zus. 2 und §. 67 Zus. 2).

§. 113.

XI. In einem jeden, im Kreise beschriebenen Vierecke ist die Summe der 2 gegenüberstehenden Winkel zweyen Rechten gleich.

Beweis: (Fig. 72).

Th) $x + y = 2R$.

D) Man ziehe die Radien BC und EC,

so ist $x = \frac{1}{2} n$
und $y = \frac{1}{2} m$ } (§. 106)

withín $x + y = \frac{1}{2}(n + m)$
$= \frac{1}{2} \times 4R$ (§. 25. Zus.)
$= 2R$.

Zusatz: Wenn sich zwey Sekanten außerhalb eines Kreises schneiden, so verhalten sich die Stücke außerhalb des Kreises umgekehrt zu einander, wie die ganzen Sekanten; nehmlich Fig. 73 ist $BD : BE = BC : AB$; denn zieht man AC und DE, so ist $x + y = 2R$ (§. 24) und $m + y = 2R$ (Lehrs.), folglich $x = m$, und da auch $n = n$, so ist $\triangle DEB \sim \triangle ABC$ (§. 60), woraus

$BD : BE = BC : AB$ folgt (§. 60. Zus. 5).

§. 114.

XII. Die Perimeter gleichnamig regulärer Polygone verhalten sich ebenso, wie die Radien oder Diameter der, um sie gezogenen Kreise.

Beweis: (Fig. 74).

Th) Perim. ABDEFGA : *Polyg.* HJKLNOH $= AC : HM$
$= 2AC : 2HM$.

D) *Polyg.* ABDEFGA ∽ *Polyg.* HJKLNOH mithin *Perim.* ABDEFGA : *Perim.* HJKLNOH = AB : HJ (§. 92) und zieht man BC und JM, so ist (nach §. 94 Zus. 4 und §. 60 Zus. 5) AB : HJ = AC : HM

folgl. *Perim.* ABDEFGA : *Perim.* HJKLNOH = AC:HM
und auch = 2AC : 2HM.

Zusätze:

1) Die Seiten gleichnamig regulärer Polygone verhalten sich ebenso, wie die Radien oder Diameter der, um die Polygone gezogenen Kreise; denn da
△ ABC ∽ △ HJM (§. 94. Zus. 4) so ist
AB : HJ = AC : HM = 2AC : 2HM (§. 60 Zus. 5).

2) Die Peripherien der Kreise verhalten sich ebenso zu einander, wie ihre Radien oder Diameter. (§. 112. Zus. 2 und Lehrs. in diesem §.)

§. 115.

XIII. In einem jeden Kreise steht der Diameter zur Peripherie in demselben Verhältnisse, wie 1 zu 3,141592....

Beweis: (Fig. 59.)

Bezeichnet man den Diameter mit d und die Peripherie mit p, so ist

Th) d : p = 1 : 3,141592 .....

Dat. Setzt man r (den Radius) = 1, so ist der Perimeter eines, im Kreise gezogenen regulären Sechseckes gleich 6 (§. 111. Zus. 1). Sucht man hierauf den Perimeter eines Zwölfeckes, dann eines Vierundzwanzigeckes, eines Achtundvierzigeckes, und setzt man diese Untersuchung nach §. 111. Zus. 2 bis zu einem 768Ecke fort, wie es Ludolph von Ceulen that, so ist dieser Perimeter so wenig mehr von der Peripherie des, darum beschriebenen Kreises verschieden, daß derselbe ohne Fehler für die Peripherie des Kreises selbst angenommen werden kann.

Um diese Berechnungen anstellen zu können, entwerfe man vor allem eine allgemeine Formel, um aus der Seite a eines gegebenen regulären Polygons, diejenige eines andern regulären Polygons von doppelt so viel Seiten bestimmen zu können. Zu diesem Zwecke betrachte man AB = a als die Seite des gegebenen Polygons, so ist AE = z jene des fraglichen Polygons (§. 111. Zus. 2). Ferners ist AD = DB = $\frac{1}{2}$a, und m = n = R (§. 111. Zus. 2 u. §. 103), folglich $AE^2 = AD^2 + DE^2$ (§. 62. Zus. 4) oder

$$z^2 = \tfrac{1}{4}a^2 + DE^2.$$

Da $DE = r - CD = r - \sqrt{(AC^2 - AD^2)}$ (§. 62 Zus. 4)

$$= r - \sqrt{(r^2 - \tfrac{1}{4}a^2)}$$

und $DE^2 = r^2 - 2r\sqrt{(r^2 - \tfrac{1}{4}a^2)} + r^2 - \tfrac{1}{4}a^2$

$$= 2r^2 - 2r\sqrt{(r^2 - \tfrac{1}{4}a^2)} - \tfrac{1}{4}a^2$$

$$= 2r\,[r - \sqrt{(r^2 - \tfrac{1}{4}a^2)}] - \tfrac{1}{4}a^2$$

so ist $z^2 = \frac{1}{4}a^2 + 2r[r - \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}a^2)}] - \frac{1}{4}a^2$ und endlich $z = \sqrt{\{2r\,[r - \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}a^2)}]\}}$

$$= \sqrt{\{2r\,[r - \tfrac{1}{2}\sqrt{(2r+a)\,(2r-a)}\,]\}}.$$

Setzt man nun a = r = 1 als die Seite eines regulären Sechseckes (§. 111), so erhält man z = 0,517638... als die Seite eines regulären Zwölfeckes, und 6,211656.... als den Perimeter desselben. Fährt man auf ähnliche Art fort die Perimeter eines Vierundzwanzigeckes, eines Achtundvierzigeckes rc. zu suchen, so ergibt sich für ein 768Eck z = 0,00818123.... und zum Perimeter desselben

6,283185......

Nimmt man diesen der Peripherie des Kreises gleich an, so erhält man

d : p = 2 : 6,283185....

oder d : p = 1 : 3,141592....

Berechnet man dieses Verhältniß auf mehrere Decimalstellen, so erhält man

d : p = 1 : 3,14159265358979323846264338327950288419 7169399....

Man nennt diese Verhältnißzahl nach ihrem Auffinder die Ludolphische Zahl, und bezeichnet sie mit π, nimmt bey Berechnungen aber, welche nicht eine besondere Genauigkeit erfordern, gewöhnlich nur die ersten 3 Decimalstellen, d. h. man setzt $\pi = 3,142$.

Zusätze:

1) Aus $d : p = 1 : \pi$ ist $p = d\pi$, oder weil $d = 2r$ ist, so ist $p = 2r\pi$, d. h. man erhält aus dem Diameter die Peripherie eines Kreises, wenn man seine Größe mit der Ludolphischen Zahl multiplizirt. Auch ist $d = \frac{p}{\pi}$ d. h. man findet aus der Peripherie den Diameter eines Kreises, wenn man ihre Größe durch die Ludolphische Zahl dividirt.

2) Bezeichnet man die Größe eines gegebenen Bogens mit n° und dessen Länge mit α, so ist

$$\alpha : p = n^\circ : 360^\circ$$ oder nach Zusatz 1,

$$\alpha : 2r\pi = n^\circ : 360^\circ,$$ woraus

$$\alpha = 2r\pi \times \frac{n^\circ}{360^\circ};$$ d. h. man erhält die Länge eines jeden beliebigen Kreisbogenstückes, wenn man die Peripherie des dazugehörigen Kreises mit einem Bruche multiplizirt, welcher die Gradanzahl des Bogens zum Zähler und 360 zum Nenner hat. Will man diese Formel für den Diameter d ausdrücken, so ist $\alpha = d\pi \times \frac{n^\circ}{360^\circ}$, weil $r = \frac{1}{2}d$ ist.

3) Aus der Formel

$$z = \sqrt{\{2r[r - \tfrac{1}{2}\sqrt{(2r+a)(2r-a)}]\}}$$ (Man sehe den Beweis des Lehrsatzes) ist

$$a = \frac{z}{r}\sqrt{[(2r+z)(2r-z)]}$$ als die Seite eines regulären Polygons von der Hälfte Anzahl Seiten in demselben Kreise.

§. 116.

β) Ueber die Vergleichung der Kreise unter sich.

I. Alle Kreise verhalten sich ihrem Inhalte nach zu einander, wie die Quadrate ihrer Radien oder Durchmesser.

Beweis: *Th)* $K : k = R^2 : r^2 = D^2 : d^2$.

D) Betrachtet man die Kreise als Dreyecke (§. 112. Zus. 4), so ist $K : k = P \times R : p \times r = P \times \frac{D}{2} : p \times \frac{d}{2}$ (§. 65, wenn P und p die Peripherien bezeichnen), oder

$$K : k = 2R^2\pi : 2r^2\pi = \frac{D^2\pi}{2} : \frac{d^2\pi}{2} \text{ (§. 115. Zus. 1)}$$
$$= R^2 : r^2 = D^2 : d^2.$$

Zusatz: Gleichnamige reguläre Polygone verhalten sich zu einander, wie die Quadrate der Radien oder Durchmesser von den, um sie gezogenen Kreislinien; denn z. B. Fig. 74 ist *Polyg.* ABDEFGA : *Polyg.* HJKLNOH = $= AB^2 : HJ^2$ (§. 95. Zus.) und

$AB^2 : HJ^2 = R^2 : r^2 = (2R)^2 : (2r)^2 = D^2 : d^2$ (§. 114 Zus. 1 und §. 320 Satz 9 des ersten Theils); folglich:

Polyg. ABDEFGA : *Polyg.* HJKLNOH =
$R^2 : r^2 = D^2 : d^2$.

§. 117.

γ) Ueber die Bestimmung des Flächeninhalts der Kreise.

Der Flächeninhalt eines Kreises ist dem Produkte aus dem Quadrate des Radius mit der Ludolphischen Zahl gleich.

Beweis: *Th)* $K = r^2\pi$.

D) Man betrachte den Kreis als ein Dreyeck, dessen Grundlinie die Peripherie und dessen Höhe der Radius ist (§. 112. Zus. 4), so ist der Flächeninhalt eines Kreises dem halben Produkte aus der Peripherie mit dem Radius gleich, nehmlich, wenn p die Peripherie bezeichnet, so ist

$K = \frac{p \cdot r}{2}$ (§. 67) $= r^2\pi$, weil $p = 2r\pi$ ist (§. 115. Zus. 1).

Zusätze:

1) Substituirt man für den Radius den Diameter, d. h. setzt man $r = \frac{1}{2}d$, so erhält man $K = \frac{1}{4}d^2\pi$.

2) Hält bey einem Kreisausschnitte der dazu gehörige Bogen n°, so ist die Formel zur Berechnung des Flächeninhalts desselben, nehmlich

$Krsect. = r^2\pi \times \frac{n^\circ}{360^\circ}$; denn, bezeichnet man die Länge des Bogens mit α, so ist

$$Krsect. = \frac{\alpha r}{2} \text{ (§. 112. Zus. 5)}$$

$$= r^2\pi \times \frac{n^\circ}{360^\circ}, \text{ weil}$$

$$\alpha = 2r\pi \times \frac{n^\circ}{360^\circ} \text{ ist (§. 115. Zus. 2).}$$

3) Man findet den Flächeninhalt eines Kreisabschnittes, wenn man (Fig. 59) den Inhalt des Dreyeckes ABC von dem des dazu gehörigen Ausschnittes abzieht, d. h. *Krsegmt.* = *Krsect.* — △ ABC =

$$r^2\pi \times \frac{n^\circ}{360^\circ} - \frac{AB \times CD}{2}$$ (Zus. 2 u. §. 67) =

$$r^2\pi \times \frac{n^\circ}{360^\circ} - \frac{a\sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}a^2)}}{2}$$ (§. 61. Zus. 4 wenn $AB = a$ gesetzt wird) =

$$= r^2\pi \times \frac{n^\circ}{360^\circ} - \frac{\frac{1}{2}a\sqrt{(4r^2 - a^2)}}{2}$$

$$= r^2\pi \times \frac{n^\circ}{360^\circ} - \tfrac{1}{4}a\sqrt{[(2r+a)(2r-a)]}$$

$$= \frac{r^2\pi \,.\, n^\circ - a\sqrt{[(2r+a)(2r-a)]} \,.\, 90^\circ}{360^\circ}.$$

4) Wenn R und r die Radien zweyer concentrischen Kreise bezeichnen, so ist der Flächeninhalt des, zwischen den Peripherien liegenden Ringes
$= \pi(R + r)(R - r)$; denn Ring
$= R^2\pi - r^2\pi$ (Lehrsatz)
$= \pi(R^2 - r^2) = \pi(R + r)(R - r)$; d. h. man darf nur das Produkt aus der Summe und Differenz beyder Radien mit der Ludolphischen Zahl multipliziren.

5) Bezeichnet man in einem regulären Polygone die Anzahl der Seiten mit n, die Größe einer Seite mit a, und den Radius des darum beschriebenen Kreises mit r, so ist (Fig. 56) *Polyg.* $= n \,.\, \triangle\, DEC$ (§. 94. Zus. 1).

$$= n \times \frac{a \,.\, AC}{2}$$ (§. 67) =

$= \frac{1}{2}\, an\sqrt{(CD^2 - AD^2)}$ (§. 62. Zus. 4)

$$= \tfrac{1}{2}\, an\sqrt{(r^2 - \tfrac{1}{4}a^2)} = \tfrac{1}{2}\, an\sqrt{\left(\frac{4r^2 - a^2}{4}\right)}$$

$= \frac{1}{4}\, an\sqrt{(4r^2 - a^2)} =$

$= \frac{1}{4}\, an\sqrt{(d^2 - a^2)}$, nehmlich der Inhalt eines jeden beliebigen regulären Polygons ist gleich dem vierten Theile des Produktes aus dem Perimeter des-

selben mit der Quadratwurzel aus der Differenz zwischen dem Quadrate des Diameters von dem darum beschriebenen Kreise und dem Quadrate einer Polygonseite.

II. Abschnitt.

Die Ebenen in Verbindung mit geraden Linien und unter sich.

A.

Die Vergleichung der verschiedenen Ebenen.

§. 118.

a) Erklärungen.

Wenn zwey Ebenen einerley Flächeninhalt haben, so sagt man sie sind einander gleich, d. h. sie stimmen an Größe (Quantität) vollkommen überein. (Man sehe die Einleitung des ersten Theiles). Haben zwey Ebenen aber nicht einerley Flächeninhalt, so stehen sie nur in einem gewissen Verhältnisse zu einander.

§. 119.

b) Lehrsätze.

I. Wenn man sich in einem rechtwinkligen Dreyecke die 3 Seiten als Seiten dreyer Quadrate denkt, so ist das Quadrat aus der Hypothenuse der Summe der Quadrate aus den beyden Katheten gleich.

Beweis: (Fig. 75.)

Th) AE = AG + CH.

D) ABC = R. Um diesen Lehrsatz auf die bekannte Pythagoreische Art beweisen zu können, stelle man sich die

Ebene des gegebenen Dreyeckes nach allen Richtungen zu erweitert, und die Quadrate in derselben vor, denke sich von dem rechten Winkel B aus auf die Hypothenuse die Linie BK senkrecht, und verlängere letztere bis sie DE in L schneidet, so ist BL # AD # CE (§. 29 Zus. 4 und 5) und AL und EL sind Parallelogramme (§. 70.) Nun ziehe man BD, KD, CF und BF, so ist

x = y (§. 75 Zus. 7 und §. 23. Zus. 3.)
m = m

mithin x + m = y + m
oder FAC = BAD
ferners ist AC = AD } (§. 72).
und AF = AB }

folglich △ FAC ≌ △ BAD (§. 49).
Nun ist △ FAC = △ FAB } (§. 52 Zus. 1)
und △ BAD = △ KAD }
also auch △ FAB = △ KAD
oder ½ AG = ½ AL (§. 75 Zus. 8)
oder AG = AL

Zieht man nun auch BE, KE, AJ und BJ, so erhält man auf demselben Wege wie vorhin

△ BCJ = △ KCE
oder ½ CH = ½ CL
oder CH = CL.
Da auch AG = AL

so ist CH + AG = CL + AL
oder AE = AG + CH.

Zusätze:

1) Da alle Quadrate aus gleichen Seiten, wenn sie auch in verschiedenen Ebenen liegen, einander congruent sind (§. 75 Zus. 11), so gilt dieser Satz auch

für Quadrate, welche nicht in der Ebene des Dreyeckes liegen.

2) Da $AE = AG^2$ / $AG = AB^2$ / und $CH = BC^2$ } (§. 82 Zus. 1)

so ist $AC^2 = AB^2 + BC^2$ d. h. In einem jeden winkligen Dreyecke ist das Quadrat aus der Größe der Hypothenuse der Summe der Quadrate aus den Größen der beyden Katheten gleich.

3) Aus $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (Zus. 2) folgt $AB^2 = AC^2 - BC^2$ d. h. Das Quadrat aus der Größe einer Kathete ist der Differenz zwischen den Quadraten aus den Größen der Hypothenuse und der ande- Kathete gleich. Oder $AB^2 = (AC + BC)(AC - BC)$ d. h. Das Quadrat aus der Größe einer Kathete ist dem Produkte aus der Summe und Differenz zwischen der Hypothenuse und der anderen Kathete gleich.

§. 120.

II. Jedes Dreyeck ist so groß wie ein Parallelogramm, das mit ihm gleiche Höhe aber nur die halbe Grundlinie hat.

Beweis: (Fig. 76.)

Th) △ ABC = BD.

D) AG = AG und BE = ½ BC

Man ziehe CF ♯ AB und verlängere AD bis F, so ist BF ein Parallelogramm, und △ ABC = ½ BF (§. 75 Zus. 8). Es ist aber auch BD = EF = ½ BF (§. 76), folglich △ ABC = BD.

Zusatz: Jedes Parallelogramm ist einem Dreyecke gleich, das dieselbe Höhe, aber eine doppelt so große Grundlinie hat, d. h. BD = △ ABC, wenn EC = BE ist (Lehrs.).

§. 121.

III. Ein, um einen Kreis beschriebenes Quadrat ist gerade noch einmal so groß, als ein, in dem Kreise beschriebenes.

Beweis: (Fig. 77).

Stellt AC das Quadrat um den Kreis vor, und denkt man sich aus der Mitte der Seiten AD und CD Senkrechte, so gehen selbe durch den Mittelpunkt (§. 110 Zus. 3, 4 und 5), und die Peripherie wird in 4 gleiche Theile geschieden (§. 105 Zus. 3). Zieht man nun die Sehne EG, so ist selbe die Seite eines Quadrates innerhalb des Kreises, und man erhält

Th) $EG^2 = \frac{AB^2}{2}$

D) $\left.\begin{array}{l} AB = BC = CD = AD \\ EG = FG = FH = EH \end{array}\right\}$ (§. 72).

Es ist $AE = \frac{1}{2} AB$, $AG = \frac{1}{2} AD = \frac{1}{2} AB = AE$.

Ferners ist $EG^2 = AE^2 + AG^2$ (§. 119 Zus. 2)

$$= 2AE^2$$

$$= \frac{2AB^2}{4}$$

$$= \frac{AB^2}{2}$$

Zusatz: Ein, um einen Kreis beschriebenes gleichseitiges Dreyeck ist gerade 4mal so groß, als das in dem Kreise gezogene; d. h. (Fig. 78) $\triangle ABC = 4 \triangle DEF$;

denn weil $\left.\begin{array}{l} BD = AE = CF = \frac{1}{2} AB \\ BF = AD = CE = \frac{1}{2} AB \end{array}\right\}$ (§. 110 Zus. 3.)

$x = y = z$ (§. 49 Zus. 4)

so ist $\triangle BDF \cong \triangle ADE \cong \triangle CEF$ (§. 49).

Ferners AB : AD = 2 : 1 } (§. 110 Zus. 3)
und auch AC : AE = 2 : 1 }
so ist DE # BC (§. 57 Zus. 1 u. 2) und
AB : AD = BC : DE (§. 58)
d. h. DE = AD weil BC = AB

Folglich sind alle 4 Dreyecke gleichseitige unter sich congruente Dreyecke, und
$\triangle$ ABC = 4 $\triangle$ DEF.

§. 122.

IV. Jeder Kreis ist einem Quadrate gleich, dessen Seite ein Produkt aus dem Radius mit 1,772 ... ist.

Beweis:

Th) $r^2 \pi = (r \times 1,772 \ldots)^2$

D) Betrachtet man $r^2 \pi$ als den Inhalt eines Quadrates, so ist die Seite dieses Quadrates $\sqrt{r^2 \pi} = r \sqrt{\pi} = r \sqrt{3,141593 \ldots} = r \times 1,772 \ldots$ Folglich ist $r^2 \pi = (r \times 1,772)^2$.

Zusätze:

1) Jeder Kreis ist einem Dreyecke gleich, dessen Grundlinien ein Produkt aus dem Diameter des Kreises mit der Quadratwurzel aus der Ludolphischen Zahl, und dessen Höhe ein Produkt aus dem Radius des Kreises mit der Quadratwurzel aus der Ludolphischen Zahl ist; denn noch Lehrsatz ist

$$r^2 \pi = (r \sqrt{\pi})^2 = (r \sqrt{\pi})\,(r \sqrt{\pi}) = \frac{2r \sqrt{\pi}}{2}\,(r \sqrt{\pi}) = \frac{(d \sqrt{\pi})\,(r \sqrt{\pi})}{2}$$

2) Jede beliebige Ebene ist einem Quadrate gleich, dessen Seite die Quadratwurzel aus dem Flächeninhalte der Ebene ist (§. 82 Zus. 1).

B.

Die Lage gerader Linien gegen Ebenen.

§. 123.

a) Erklärungen.

Derjenige Punkt, welchen eine Linie mit einer Ebene gemein hat, wenn erstere letztere durchschneidet, heißt ihr Durchschnittspunkt.

Eine gerade Linie steht dann auf einer Ebene senkrecht, wenn alle geraden Linien, welche in der Ebene nach allen Richtungen durch ihren Durchschnittspunkt gezogen werden können, mit ihr rechte Winkel machen. Z. B. Fig. 79 steht AB auf der Ebene GH senkrecht, weil ABF = ABE = ABD = ABC = R ist.

Gerade Linien, welche in allen ihren Theilen gleich weit von einer Ebene entfernt sind, und diese Entfernung stets beybehielten, wenn man sie oder die Ebene beliebig verlängern würde, sind mit der Ebene parallel.

§. 124.

Wenn man sich von irgend einem Punkte in einer geraden Linie, welche eine Ebene durchschneidet, auf letztere eine Senkrechte gefällt denkt, und dann die Durchschnittspunkte mit der Ebene durch eine gerade Linie mit einander verbindet, so gibt derjenige Winkel, welcher der Senkrechten gegenübersteht, den Neigungswinkel der geraden Linie gegen die Ebene an. Z. B. Fig. 80 ist x der Neigungswinkel der Linie AB gegen die Ebene DE.

§. 125.

b) Grundsätze.

1) Eine Linie, welche ganz in einer Ebene liegt, ist gerad.

2) Eine gerade Linie, von welcher sich 2 Punkte in einer Ebene befinden, liegt ganz in derselben.

3) Eine gerade Linie kann eine Ebene nur in einem Punkte durchschneiden.

§. 126.

c) Lehrsätze.

I. Wenn eine gerade Linie so auf einer Ebene aufsteht, daß sie mit zwey geraden Linien, welche in der Ebene sind, aber nicht in einer Verlängerung liegen dürfen, in dem Durchschnittspunkte derselben rechte Winkel bildet, so steht sie auch senkrecht auf der Ebene selbst.

Beweis: (Fig. 79.)

Da nach der Erklärung §. 123 eine gerade Linie, welche mit jeder, durch ihren Durchschnittspunkt in der Ebene, gezogenen geraden Linie rechte Winkel bildet, auch auf der ganzen Ebene senkrecht steht, so ist nur zu beweisen, daß dieselbe noch auf einer andern beliebigen z. B. BK senkrecht steht. Es ist demnach

Th) ABK = R, wenn

D) ABF = ABE = R.

Man verlängere BE und BF, mache BD = BF, so wie BC = BE und ziehe DC und EF. Dann ist CBD = EBF (§. 26), mithin △ CBD ≌ △ EBF (§. 49). Hieraus folgt, wenn man durch B die Linie JK zieht,

JDB = BEK
und weil DBJ = EBK (§. 26)
und DB = BE (verm. Constr.)

So ist auch △ JDB ≌ △ BEK (§. 51),
woraus BJ = BK und DJ = EK folgt.

Nun ziehe man AD und AE, und lege durch das △ A DE eine Ebene, so hat man DB = BE (verm. Constr.), AB = AB, und ABD = ABE = R, und man erhält demnach △ ABD ≌ △ ABE (§. 49) und hieraus

AD = AE.

Ebenso ziehe man AC und AF, und lege ebenfalls eine Ebene durch das △ ACF, so erhält man auf demselben Wege AC = AF.

Indem also AD = AE
AC = AF
und CD = EF (weil △ CDB ≌ △ BEF)

---

so ist △ ACD ≌ △ AEF (§. 50)
folglich AEF = ADC und ACD = AFE.

Zieht man AJ und AK, so erhält man,
weil DJ = EK
AD = AE
und ADJ = AEK

△ ADJ ≌ △ AEK (§. 49)
folglich AJ = AK
ferners BJ = BK (weil △ DBJ ≌ △ EBK)
und AB = AB

---

also △ ABJ ≌ △ ABK (§. 50)
und mithin endlich ABJ = ABK = R (§. 24 Zus. 2).

Zusätze:

1) Eine gerade Linie, welche auf einer Ebene senkrecht steht, bildet mit allen Linien, welche durch den Durch-

schnittspunkt gezogen werden, rechte Winkel (Lehrs. und §. 123).

2) Ist der Neigungswinkel einer geraden Linie gegen eine Ebene ein Rechter, so steht erstere auf letzterer senkrecht (Lehrs. und §. 124).

3) Aus einem jeden Punkte außerhalb einer Ebene ist nur eine Senkrechte auf letztere möglich (§. 14 Grunds. 1 u. §. 123).

4) Diese Senkrechte ist die kürzeste Linie unter allen möglichen zwischen dem Punkte und der Ebene (§. 14 Zus. 5 und §. 123).

5) Durch einen jeden Punkt in einer Ebene ist nur eine Senkrechte möglich (§. 14 Zus. 4).

§. 127.

II. Wenn von zwey Parallellinien eine auf einer Ebene senkrecht steht, so findet selbes auch bey der anderen statt.

Beweis: (Fig. 81).

Man nehme AB als senkrecht auf die Ebnen JK und CD # AB an, so muß die senkrechte Lage von CD gegen die Ebene bewiesen werden. Da hierzu erforderlich ist, daß CD auf zwey geraden Linien in der Ebene senkrecht steht (§. 126), so ziehe man zu diesem Behufe BD, und noch eine Linie DH, und man erhält als

Th) CDB = CDH = R

D) AB # CD und ABD = R

Man mache BE = DF und ziehe EF, so ist EF = BD (§. 51 Zus. 5), woraus EBD + FDB = 2R folgt (§. 75 Zus. 4). Da aber EBD = R, so ist auch FDB = CDB = R.

Um zu beweisen, daß CD auch auf DH senkrecht steht, denke man sich letztere Linie in der Ebene JK auf BD senk-

recht, mache DG = BE und ziehe ED und BG, so hat man

$$\begin{array}{l} BE = DG \\ BD = BD \\ \text{und } EBD = BDG = R \\ \hline \text{also } \triangle EBD \cong \triangle BDG \text{ (§. 49)} \end{array}$$

woraus DE = BG folgt. Zieht man endlich noch EG, so ist BE = DG und

$$\begin{array}{l} EG = EG \\ \hline \text{folglich } \triangle EBG \cong \triangle EDG \text{ (§. 50)} \end{array}$$

und hiemit EBG = EDG = R, weil AB auf jeder Linie in JK senkrecht stehen muß (§. 123). Da nun DG sowohl auf BD als DE in der Ebene des Parallelogrammes BF senkrecht steht, so ist endlich auch CDH = R (§. 123 u. 126).

Zusätze:

1) Wenn zwey gerade Linien auf einer Ebene senkrecht aufstehen, so sind selbe parallel, denn (Fig. 81) ist FDB = EBL = R (§. 29).

2) Durch einen jeden Punkt in einer Ebene ist zu einer geraden Linie, welche die Ebene durchschneidet, nur eine Parallele möglich (§. 29 Zus. 7).

3) Parallellinien, auf eine und dieselbe Ebene gezogen, haben gleiche Neigungswinkel; denn verbindet man die Durchschnittspunkte derselben mit einer geraden Linie, so sind die Neigungswinkel die äußeren und inneren gegenüberstehenden Winkel der Parallelen und folglich einander gleich (§. 29).

4) Die Summe zweyer Winkel, welche zwey Parallellinien mit derjenigen geraden Linie machen, die ihre Durchschnittspunkte in einer Ebene miteinander verbindet, beträgt jederzeit zwey Rechte; d. h. z. B. (Fig. 80) FCB + ABC = 2R (§. 31 Zus.)

§. 128.

III. Wenn zwey Winkeln in verschiedenen Ebenen eine solche Lage haben, daß ihre Schenkeln gegenseitig parallel sind, so sind sie gleich.

Beweis: (Fig. 82.)

Th) $ABC = DEF$

D) $AB \# DE$, $BC \# EF$

Man mache $AB = DE$ und $BC = EF$, und ziehe AD, BE, CF, AC und DF, so ist

$$\left.\begin{array}{c} AD = BE \\ \# \\ BE = CF \\ \# \end{array}\right\} \text{(§. 51 Zus. 5)}$$

also $AD = CF$ (§. 29 Zus. 3.)

$\#$

Hieraus folgt $AC = DF$ (§. 51 Zus. 5)

und da $\left.\begin{array}{l} AB = DE \\ BC = EF \end{array}\right\}$ (verm. Constr.)

so ist $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ (§. 50)

folglich $ABC = DEF$

Zusatz: Wenn auch die Schenkeln sich entgegengesetzt liegen, so sind die Winkeln dennoch gleich; denn

$m = ABC$ (§. 26)

$ABC = DEF$ (§. verm. Lehrs.)

also $m = DEF$.

Ebenso ist auch $n = ABC$.

C.

Die Lage der Ebenen gegen einander.

§. 129.

a) Grundsatz.

Zwey Ebenen können sich nur in einer geraden Linie durchschneiden, und diese Linie haben beyde miteinander gemein, d. h. dieselbe liegt in beyden Ebenen.

§. 130.

b) Erklärungen.

Diejenige gerade Linie, welche zwey, sich schneidende, Ebenen mit einander gemein haben, wird ihre Durchschnittslinie genannt.

Wenn man bey zwey, sich schneidenden Ebenen von einem beliebigen Punkte ihrer Durchschnittslinie aus in beyden Ebenen auf die Durchschnittslinie Senkrechte errichtet, so ist der, dadurch entstehende Winkel der Neigungswinkel der beyden Ebenen. Z. B. (Fig. 83) ist ABC der Neigungswinkel der Ebenen FG und HJ. Diejenige Ebene ACB, in welcher der Neigungswinkel liegt, nennt man die Ebene des Neigungswinkels.

§. 131.

Wenn zwey Ebenen nach allen Richtungen gleiche Entfernungen von einander haben, so sind selbe parallel, und sie heißen dann unter sich Parallelebenen.

§. 132.

c) Lehrsätze.

I. Eine Ebene steht auf einer andern senkrecht, wenn eine gerade Linie, welche in der einen Ebene auf die Durchschnittslinie senkrecht gezogen wird, auch zugleich auf einer anderen Linie in der anderen Ebene senkrecht steht.

Beweis: (Fig. 84).

Steht die Linie AB auf CD senkrecht, so findet selbes schon bey einer Linie in der Ebene GH statt, weil beyde Ebenen CD miteinander gemein haben (§. 129). Bildet AB nun auch noch mit einer anderen Linie EF in der Ebene GH einen rechten Winkel, so steht sie auf der Ebene selbst senkrecht (§. 126). Da durch die Punkte ACD die Lage der Ebenen JK bestimmt ist (§. 39), so ist unter diesen Umständen auch JK senkrecht auf GH.

Zusätze:

1) Ist bey zwey Ebenen der Neigungswinkel einem Rechten gleich, so stehen die Ebenen aufeinander senkrecht. (§. 130 und Lehrs. dieses §.)

2) Die Ebene des Neigungswinkels zweyer Ebenen steht immer auf beyden Ebenen senkrecht; denn Fig. 83 steht DE senkrecht auf AB und BC (§. 130); da nun DE sowohl in der Ebene HJ, als auch in FG liegt (§. 129), so steht sowohl HJ, als auch FG auf dem △ ABC senkrecht

3) Es steht demnach die Durchschnittslinie zweyer Ebenen auf der Ebene des Neigungswinkels senkrecht.

4) Wenn man durch eine gerade Linie, welche auf einer Ebene senkrecht steht, ebenfalls eine Ebene legt, so steht diese selbst auf jener Ebene senkrecht; denn der Neigungswinkel ist ein Rechter (Zus. 1).

5) Wenn zwey Ebenen auf einander senkrecht stehen, und man zieht in einer derselben auf die Durchschnittlinie eine Senkrechte, so steht die letztere auch auf der anderen Ebene senkrecht; denn der Neigungswinkel ist ein Rechter (Zus. 1).

6) Wenn eine gerade Linie auf zwey Ebenen zugleich senkrecht steht, so sind letztere parallel; denn steht

(Fig. 82.) EB auf GH senkrecht, so ist ABE = CBE = R. Ist nun auch BED = BEF = R, so ist DE # AB und EF # BC. Da endlich durch die 3 Punkte DEF die Lage der Ebene JK bestimmt ist (§. 39), so ist JK # GH.

7) Gerade Linien, welche in parallelen Ebenen gleiche Lage haben, sind parallel; denn sind die Ebenen parallel, so bleiben auch die Linien nach einer und derselben Richtung in diesen Ebenen immer gleich weit von einander entfernt (§. 131), d. h. sie sind parallel (§. 27.)

8) Wenn zwey Parallelebenen durch eine dritte durchschnitten werden, so sind ihre Durchschnittslinien parallel; denn Fig. 85 liegen FG und HJ in der Ebene OP, so wie erstere Linie auch in KL und letztere auch in MN liegt, folglich haben FG und HJ einerley Lage (da MN # KL), und sind also parallel (Zus. 7).

§. 133.

II. Bey zwey parallelen Ebenen, welche durch eine dritte Ebene durchschnitten werden, sind die Neigungswinkeln, welche letztere mit ersteren nach einer Seite zu macht, gleich.

Beweis: (Fig. 85.)

Th) ABC = ADE.

Dat.) KL # MN.

Nach §. 132 Zus. 8 ist FG # HJ.

Denkt man sich durch AD senkrecht auf FG und HJ die Neigungsebene durchgelegt, so wird selbe die Ebene KL in BC, und MN in DE schneiden, nnd also BC # DE seyn (§. 132 Zus. 8); woraus ABC = ADE folgt (§. 29).

Zusatz: Zwey Ebenen, welche in parallelen Durchschnittslinien durch eine dritte Ebene so geschnitten werden, daß die Neigungswinkeln nach einer Seite zu einander gleich sind, sind zu einander parallel; denn ist

ABC = ADE,

so ist BC # DE (§. 29 Zus. 1);

da nun auch FG # HJ und die Lage der Ebenen durch FBC u. HDE bestimmt ist,

so ist auch KL # MN.

III. Hauptstück.

Die Stereometrie.

I. Abschnitt.

Vorkenntnisse.

§. 134.

a) Erklärungen.

Die Stereometrie ist jene Wissenschaft, welche von den Eigenschaften der geometrischen Körper handelt. Ein von allen Seiten begränzter Raum ist ein geometrischer Körper. Die Gränzen eines geometrischen Körpers sind Flächen (§. 4); sie bestehen entweder aus lauter Ebenen, oder aus lauter krummen Flächen, oder sie sind aus ebenen und krummen Flächen zusammengesetzt.

§. 135.

Ein körperlicher Winkel oder eine körperliche Ecke ist die Neigung oder Abweichung mehrerer Flächen gegeneinander, welche einen Punkt mit einander gemein haben; er wird demnach durch Flächen gebildet. Z. B. In Fig. 86 ist bey D ein körperlicher Winkel, welcher durch

die Vereinigung der Ebenen von den Flächenwinkeln ADB, ADC und BDC in dem Punkte D entsteht.

Man sagt zwey körperliche Winkel sind congruent, wenn die entstehenden Flächenwinkeln sowohl, als auch die Neigungen der Flächen gegeneinander von je zwey und zwey sich gleich sind; denn wenn sich die gleichen Flächenwinkeln decken, so müssen auch die Flächen, welche dieselben bilden, vollkommen auf einander fallen, und also die körperlichen Winkeln vollkommen in einander passen (§. 8).

Jede Linie, unter welcher zwey Flächen an einander stossen heißt eine Kante.

Geometrische Körper, welche genau in einander passen, d. h. deren Gränzflächen sich vollkommen decken, sind congruent (erster Theil Seite 5).

§. 136.

Man nennt einen geometrischen Körper regulär, wenn seine Gränzen lauter reguläre, congruente Ebenen, und seine körperlichen Winkel alle einander congruent sind. Diese regulären geometrischen Körper sind:

1) Das Tetraëdron (τετραεδρον von τετράς, vier) ein von 4 gleichen regulären Dreyecken eingeschlossener Raum (Fig. 86).

2) Das Hexaëdron (ἑξαεδρον von ἑξας, sechs) oder der Würfel oder Kubus (κύβος) ein von 6 gleichen Quadraten begränzter Raum (Fig. 87).

3) Das Oktaëdron (ὀκταεδρον von ὀκτω, acht) ein von 8 gleichen regulären Dreyecken eingeschlossener Raum (Fig. 88).

4) Das Dodekaëdron (δωδεκαεδρον von δωδεκας, zwölf) ein von 12 gleichen regulären Fünfecken begränzter Raum (Fig. 89).

5) Das Ikosaëdron (εἰκοσαεδρον von εἰκας, zwanzig) ein von 20 gleichen regulären Dreyecken geschlossener Raum. (Fig. 90.)

§. 137.

Die geometrischen Körper theilt man ferners in einfache und in zusammengesetzte ein. Die vorzüglichsten der ersten Gattung sind:

1) Das Prisma (πρισμα, Ecksäule) ein geometrischer Körper, welcher von zwey congruenten parallellaufenden geradlinigen Ebenen, und von so vielen ebenen geradlinigen Parallelogrammen begränzt ist, als jede der zwey Parallebenen Seiten zählt. (Fig. 91.)
2) Der Cylinder (κύλινδρος, Walze) ein geometrischer Körper, welcher von zwey congruenten parallellaufenden Kreisebenen und einer krummen Fläche begränzt ist. (Fig. 92.)
3) Die Pyramide (πύραμίς, Spitzsäule) ein geometrischer Körper, welcher von einer beliebigen geradlinigen Ebene und so vielen geradlinigen Dreyecken, welch' letztere sich in einer Spitze vereinigen, begränzt ist, als erstere Ebene Seiten hat. (Fig. 93.)
4) Der Kegel oder Konus (κωνος) ein geometrischer Körper, welcher von einer Kreisebene und von einer krummen Fläche so begränzt ist, daß letztere sich, der Kreisebene gegenüber, in eine Spitze endet. (Fig. 94.)
5) Die Kugel (sphaera, σφαίρα) ein geometrischer Körper, von einer einzigen krummen Fläche der Gestalt begränzt, daß solche in allen ihren Punkten gleich weit von einem Punkte innerhalb des Körpers entfernt ist. (Fig. 95.)

§. 138.

Die Gränze eines Körpers nennt man dessen Oberfläche. Breitet man diese Oberfläche in eine Ebene aus, so erhält man eine Figur, welche aus allen Gränzflächen zusammengesetzt ist; man nennt dieselbe das geometrische Netz des Körpers. So z. B. ist Fig. 96 das Netz eines Tetraëdrons.

§. 139.

b) Grundsätze.

1) Zur Bildung eines geometrischen Körpers sind wenigstens 4 Ebenen nöthig.

2) Ein geometrischer Körper kann auch eine einzige krumme Fläche zur Gränze haben.

Zusätze:

1) Alle geometrischen Körper verhalten sich ebenso, wie ihre Größen, d. h. wie ihre kubischen Inhalte. (§. 7.)

2) Zur Bildung eines körperlichen Winkels sind wenigstens 3 Ebenen nöthig.

§. 140.

c) Lehrsätze.

I. Bey einem jeden körperlichen Winkel ist die Summe aller, ihn bildenden, ebenen Winkeln allzeit kleiner als 4R.

Beweis: Die Wahrheit dieses Lehrsatzes liegt darin, daß, wenn die Summe aller ebenen Winkeln zusammen 4R wäre, dieselben alle in einer Ebene liegen würden (§. 25 Zus.). Weil sie aber nicht in einer Ebene liegen dürfen, indem sie sonst keinen körperlichen Winkel bilden würden, so muß ihre Summe allzeit kleiner als 4R seyn.

Zusätze:

1) In einem Tetraëdron (Fig. 86) beträgt die Summe aller ebenen Winkeln bey jedem körperlichen Winkel

180°; denn der Winkel eines regulären Dreyeckes ist 60° (§. 54 Zus. 4), mithin haben alle 3, welche hier eine körperliche Ecke machen, zusammen 180°.

2) Beym Hexaëdron (Fig. 87) beträgt die Summe der drey ebenen Winkeln in einer jeden Ecke 270°, weil der Winkel eines jeden Quadrates = R = 90° ist (§. 75 Zus. 7).

3) Beym Oktaëdron (Fig. 88) machen die 4 zusammenstossenden ebenen Winkeln 60° × 4 = 240° (§. 54 Zus. 4).

4) Da der Polygonwinkel eines regulären Fünfeckes gleich 108° (§. 93 Zus. 3), so ist die Summe von 3 solchen, welche eine körperliche Ecke des Dodekaëdrons (Fig. 89) bilden, 324°.

5) Beym Ikosaëdron endlich (Fig. 92) gibt die Summe der 5, in einer Ecke zusammenstossenden ebenen Winkeln 60° × 5 = 300°. (§. 54 Zus. 4.)

6) Die §. 136 erwähnten geometrischen Körper sind die einzigen regulären; denn

Erstens: Aus mehr als 5 gleichen regulären Dreyecken kann kein körperlicher Winkel mehr gebildet werden, weil 60° × 6 schon 360° gibt (§. 54 Zus. 4), welches dem Lehrsatze zuwider wäre.

Zweytens: Ist das Hexaëdron der einzige reguläre Körper, welcher durch gleiche Quadrate begränzt werden kann, weil 90° × 4 schon 360° ist.

Drittens: Ist das Dodekaëdron der einzige reguläre Körper, welcher durch gleiche reguläre Fünfecke eingeschlossen werden kann, weil 4 Winkeln eines regulären Fünfeckes 108° × 4

= 432 (§. 93 Zus. 3) also sogar mehr als 4R geben.

Viertens: Gibt es keinen regulären Körper, welcher von mehr als fünfseitigen Polygonen begränzt wäre, weil die Summe von 3 Winkeln eines regulären Sechseckes schon 120° × 3 = 360° (§. 93 Zus. 3), und jene bey den übrigen mehrseitigen regulären Polygonen sogar noch darüber geben würden.

§. 141.

II. Körper, welche der Ordnung nach gleich viel ähnliche Gränzflächen, und ihre körperlichen Winkeln congruent haben, sind sich ähnlich.

Beweis: Aehnlichkeit heißt nichts anderes als Uebereinstimmung an Gestalt oder Form (1ter Theil Seite 5). Die Gestalt eines Körpers ist durch die Anzahl, Beschaffenheit und Lage der, ihn begränzenden Flächen vollkommen bestimmt. Folglich sind zwey oder mehrere Körper unter den erwähnten Umständen einander ähnlich.

Zusätze:

1) In ähnlichen Körpern sind gleichliegende Flächen und Winkeln einander gleich, denn sonst wären die Körper nicht ähnlich (Lehrs.), und gleichliegende Linien stehen miteinander in Proportion. (§. 91 Zus. 1.)

2) Körper, welche der Ordnung nach gleich viel congruente Gränzflächen und congruente körperliche Winkeln haben, sind congruent; denn alle körperlichen Winkeln passen in einander und die begränzenden Flächen decken sich der Ordnung nach, mithin passen die Körper vollkommen in einander. (§. 135.)

§. 142.

III. Die Oberfläche eines Körpers ist der Summe aller, in seinem Netze eingezeichneten Ebenen gleich.

Beweis: Da das Netz eines Körpers seine, sich in einer und derselben Ebene befindlichen Gränzflächen vorstellt (§. 138), und diese zusammen die Oberfläche ausmachen (§. 138), so ist die Summe dieser, im Netze eingezeichneten Ebenen der Oberfläche des treffenden Körpers gleich.

Zusätze:

1) Die Oberfläche eines Körpers ist der Summe seiner Gränzflächen gleich.
2) Die Oberfläche eines regulären Körpers ist dem Produkte aus einer Gränzfläche mit der Anzahl der letztern gleich. (§. 136.)

II. Abschnitt.

Die einfachen geometrischen Körper.

A.

Die Prisma.

§. 143.

a) Erklärungen.

Ein Prisma (Fig. 91) ist ein von zwey congruenten parallellaufenden geradlinigen Ebenen, und von so vielen ebenen geradlinigen Parallelogrammen begränzter Körper, als eine jede der Parallelebenen Seiten hat. Die zwey congruenten geradlinigen Parallelebenen ABC und DEF heißen die Grundflächen, und die ebenen geradlinigen

Parallelogramme AF, AE und BF die Seitenflächen des Prismas. Die Senkrechte GH aus einem beliebigen Punkte einer Grundfläche auf die andere nennt man die Höhe des Prismas.

§. 144.

Die Prismen erhalten nach der Seitenanzahl ihrer Grundflächen die Benennung dreyseitig, vierseitig u. s. w. und zwar gleichseitig, wenn die Grundflächen regulär, und ungleichseitig, wenn die Grundflächen irregulär sind. Ein Prisma ist regulär, wenn ihre Grund- und Seitenflächen lauter congruente reguläre Ebenen sind. Wenn die Seitenflächen auf den Grundflächen senkrecht stehen, so heißt das Prisma senkrecht, übrigens aber schief. Ein Prisma, in welchem die Grundflächen ebenfalls Parallelogramme sind, und daher auch die, sich gegenüberstehenden Seitenflächen einander parallel laufen, heißt insbesondere ein Parallelepipedon (παραλλελεπιπεδον) wie Fig. 97. Sind in demselben die begränzenden Flächen lauter Rechtecke, so heißt es rechtwinklig, sonst aber schiefwinklig. Es ist demnach das Hexaëdron oder der Kubus ein Parallelepipedon dessen Grund- und Seitenflächen Quadrate sind (Fig. 87), d. h. es ist ein reguläres Prisma.

§. 145.

b) Postulat.

Jedes Prisma hat eben so viele Seitenflächen, als eine Grundfläche Seiten oder Winkeln hat.

Zusätze:

1) Es gibt kein Prisma, welches weniger als 3 Seitenflächen hat. (§. 40. Zus. 3.)

2) In einem senkrechten Prisma sind die Seitenflächen

lauter Rechtecke, in einem schiefen aber lauter Rhomboide. (§. 143 u. 144.)

§. 146.

c) Lehrsätze.

α) Ueber die Bestimmung der Oberfläche bey Prismen.

Die Oberfläche eines Prismas ist der Summe aus dem doppelten Inhalte einer Grundfläche mit dem Inhalte aller Seitenflächen zusammen gleich.

Beweis: Stellt Fig. 98 das Netz eines Primas vor, so erhält man als

Th) *Oberfl.* $= 2\triangle ABC + BE + CF + HJ.$

Da dieses Prisma von den Dreyecken ABC und FGH, so wie von den Parallelogrammen BE, CF und HJ begränzt ist, so ist die Oberfläche der Summe dieser Gränzflächen gleich (§. 142), nehmlich

Oberfl. $= 2\,\triangle\, ABC + BE + CF + HJ.$

Zusätze:

1) Ist das Prisma senkrecht, so ist seine Oberfläche der Summe aus der doppelten Grundfläche mit einem Parallelogramme gleich, das den Perimeter der Grundfläche zu seiner Grundlinie und die Höhe des Prismas zu seiner eigenen Höhe hat. (§. 82 Zus. 3.)

2) Bezeichnet man in einem senkrechten Parallelepipedon die Grundfläche mit B, und jede von 2 gegenüberstehenden gleichen Seitenflächen mit P und p, so ist die Oberfläche desselben gleich $2B + 2P + 2p = 2(B + P + p)$; d. h. der doppelten Summe aus der Grundfläche mit 2 anstossenden Seitenflächen.

3) Benennt man eine Kante des Hexaëdrons mit a, so ist die Oberfläche desselben nach Zusatz 2 gleich $2(a^2 + a^2 + a^2) = 6a^2$ (§. 82 Zus. 1 und §. 142 Zus. 2).

4) Setzt man in einem jeden gleichseitigen Prisma von n Seiten die Grundfläche gleich B und eine der Seitenflächen gleich P, so ist die Oberfläche desselben gleich $2B + nP$.

§. 147.

β) Ueber die Congruenz der Prismen.

I. Zwey Prismen von gleicher Höhe, deren Grundflächen congruent sind, und deren Seitenflächen der Ordnung nach gleiche Neigungen gegen die Grundflächen haben, sind congruent.

Beweis: Man denke sich diese Prismen so in einander gesteckt, daß die congruenten Grundflächen sich vollkommen decken, so werden immer zwey gleichliegende Seitenflächen zusammenfallen und sich decken, weil sie gleiche Neigungen gegen die Grundflächen haben, und Parallelogramme sind. (§. 133 Zus. und §. 51 Zus. 5.)

Solche Prismen passen demnach vollkommen ineinander, sind also congruent. (§. 135.)

Zusatz: Alle Hexaëdron mit gleichen Kanten sind einander congruent, und so umgekehrt; denn die Grund- und Seitenflächen sind einander congruent und die Neigungswinkeln sind alle Rechte. (§. 144.)

§. 148.

II. Eine Ebene, welche zwey parallele Grund- oder Seitenflächen eines Parallelepipedons nach ihrer Diagonale durchschneidet, theilt dasselbe in zwey congruente dreyseitige Prismen.

Beweis: (Fig. 99.)

Th) ABCEFG ≌ BCDFGH.

D) Da EH ≌ AD (§. 143), so ist, indem BC und FG die gleichliegenden Diagonalen sind

△ ABC ≌ △ BCD ≌ △ EFG ≌ △ FGH.

Die zwey Prismen sind demnach dreyseitig und haben congruente Grundflächen. Da ferners das Parallelogramm BG beyden Prismen zukömmt, und die Seitenflächen AD und AG, EH und BH, als auch AD und AF, EH und CH gleiche Neigungen gegeneinander haben, weil je zwey und zwey parallel laufen müssen (§. 144 u. §. 133), so ist

ABCEFG ≌ BCDFGH (§. 147).

Zusätze:

1) Ein jedes dreyseitige Prisma ist die Hälfte von einem Parallelepipedon, das dieselbe Höhe und eine doppelt so große Grundfläche hat.

2) Ein jedes mehrseitige Prisma läßt sich in dreyseitige zerlegen; denn man darf nur die Grundflächen durch gleichliegende Diagonalen in Dreyecke zertheilen und durch dieselben Ebenen legen. Man erhält dadurch um 2 dreyseitige Prismen weniger, als das gegebene Prisma Seiten hat. (§. 90. Zus. 2.)

§. 149.

γ) Ueber die Beschaffenheit gerader Linien und Ebenen in Prismen.

Wenn man ein Prisma durch eine Ebene parallel zu seiner Grundfläche schneidet, so ist die, durch die Seitenflächen begränzte Durchschnittsebene mit der Grundfläche congruent.

Beweis: (Fig. 91.)

Th) △ JRL ≌ △ ABC

D) △ JKL ⋕ △ ABC.

Hieraus folgt

JL ∦ AC, KL ∦ BC u. JK ∦ AB (§. 132 Zus. 7 u. 8)
und JKL = ABC (§. 128).

Ferners ist JK = AB
und KL = BC } (§. 51. Zus. 5)

mithin △ JKL ≅ △ ABC (§. 49).

Zusätze:

1) Um diesen Satz für mehr als dreyseitige Prismen zu beweisen, theile man nach §. 148 Zus. 2 das ganze Prisma in dreyseitige, und beweise von je zwey und zwey Dreyecke die Congruenz.

2) Wenn man eine Kante oder die Höhenlinie eines Prismas in mehrere gleiche Theile theilt, und durch die Theilungspunkte parallel zur Grundfläche Ebenen legt, so wird das ganze Prisma in eben so viel congruente Prismen getheilt, als die Anzahl der Theilungspunkte beträgt; denn die Grundflächen sind congruent (Lehrs.), die Höhen sind gleich, und die Neigungswinkeln der Seitenflächen gegen die Grundflächen sind der Ordnung nach einander gleich. (§. 147.)

§. 150.

δ) Ueber die Gleichheit und Vergleichung der Prismen unter sich.

I. Alle Parallelepipeden von derselben Grundfläche und gleicher Höhe sind einander gleich.

Beweis: Hier können zwey Hauptfälle statt finden, nehmlich: entweder liegen die Parallelepipeden mit zwey Seitenflächen in einer Ebene oder in verschiedenen Ebenen. Der erste Fall zerfällt wieder in 3 Nebenfälle; denn diejenigen Grundflächen, welche der gemeinschaftlichen gegenüber stehen, können 1) zum Theile noch in einander fallen

(Fig. 100), oder 2) sich nur mehr in einer Linie berühren (Fig. 101), oder 3) ganz auseinander fallen. (Fig. 102.)

Erstens: (Fig. 100.)

Th) ABCDEFGH = ABCDJKLM

D) AD = AD, EM ♯ AD und AK ♯ CM.

Man betrachte die Dreyecke AEJ und BFK als die Grundflächen der zwey dreyseitigen Prismen AEJCGL und BFKDHM. In denselben ist

EJ = FK, weil EF — JF = JK — JF } (§. 51
AE = BF } Zus. 5)
AJ = BK also

△ AEJ ≌ △ BFK (§. 50). Und da EL und FM in einer Ebene liegen, CE ♯ DF und AL ♯ BM (§. 144), so haben die gleichliegenden Seitenflächen gleiche Neigungen gegen die Grundflächen (§. 133), und folglich

AEJCGL ≌ BFKDHM (§. 147)

Nun + ABCDFJLH = + ABCDFJLH

gibt ABCDEFGH = ABCDJKLM.

Zweytens: (Fig. 101).

Th) ABCDEFGH = ABCDFJHK

D) AD = AD, EK ♯ AD, AJ ♯ CK

Da AEFCGH ≌ BFJDHK (§. 147)
und + ABFCDH = + ABFCDH

so ist ABCDEFGH = ABCDFJHK.

Drittens: (Fig. 102.)

Th) ABCDEFGH = ABCDJKLM

D) AD = AD, EM ♯ AD, AK ♯ CM.

Man denke sich den Raum FJNHLO begränzt, so ist

AEJCGL ≌ BFKDHM (§. 147).

Nun + ABNCDO = + ABNCDO
und — FJNHLO = — FJNHLO

gibt ABCDEFGH = ABCDJKLM.

Um den zweyten Hauptfall zu beweisen betrachte man Fig. 103.

Th) ABCDEFGH = ABCDJKLM

D) AC = AC und NO # AC.

Man verlängere FG, EH, JK und LM, so entsteht durch die Durchschnittspunkte dieser Verlängerungen in der Ebene NO das Parallelogramm PR, welches congruent und parallel zu AC ist, weil

$$\left.\begin{array}{r} PQ \;\#\; JM \;\#\; AD \\ SR \;\#\; KL \;\#\; BC \\ PS \;\#\; EF \;\#\; AB \\ \text{und}\; QR \;\#\; HG \;\#\; CD \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} \text{als Verlängerung von EH} \\ \quad\text{"}\quad\text{"}\quad\text{"}\quad\text{"}\quad FG \\ \quad\text{"}\quad\text{"}\quad\text{"}\quad\text{"}\quad JK \\ \quad\text{"}\quad\text{"}\quad\text{"}\quad\text{"}\quad LM \end{array}\right\}$$

$$\text{woraus}\; \left.\begin{array}{r} PQ = AD = BC = SR \\ PS = AB = CD = QR \end{array}\right\} \text{(§. 51 Zus. 5)}$$

und x = y = z = m (§. 29) folgt, mithin ist auch

PR $\cong$ EG $\cong$ JL $\cong$ AC (§. 75. Zus. 11).

Nun lege man durch ABKP, BCFR, CDQL und ADQE Ebenen, so wird sich durch die Durchschnittslinien derselben das Parallelepipedon ABCD PQRS bilden, und es ist nach diesem §. Drittens

ABCDEFGH = ABCDPQRS = ABCDJKLM folglich
ABCDEFGH = ABCDJKLM.

Zusätze:

1) Alle parallelepipeden mit congruenten Grundflächen und gleichen Höhen sind einander gleich; denn die Grundflächen decken sich, wenn man sie auf einander legt, und da die Parallelepipeden auch gleiche Höhen haben, so sind dieselben gleich.

2) Alle dreyseitigen Prismen mit congruenten Grundflächen und gleichen Höhen sind sich gleich (§. 148. Zus. 1).

3) Alle Prismen mit congruenten Grundflächen und gleichen Höhen sind einander gleich; denn man darf nur die Prismen in lauter gleichliegende dreyseitige Prismen zertheilen (§. 148 Zus. 2), so sind die letzteren einzeln einander gleich (Zus. 2), und folglich auch die ganzen Prismen (1ter Theil, Einleitung Grunds. 4).

4) Rechtwinklige und schiefwinklige Parallelepipeden von gleichen Grundflächen und Höhen sind einander gleich, wenn sie an der Grundfläche eine gemeinschaftliche Kante haben; d. h. (Fig. 104.)

ABCDEFGH = ABJKEFLM; denn

$$\left.\begin{array}{l} AJ = BK = EL = FM \\ AC = BD = EG = FH \end{array}\right\} (§. 51\ Zus. 5)$$

und x = y = m = n (§. 29)

mithin △ACJ ≌ △BDK ≌ △EGL ≌ △FHM (§. 49).

Da nun auch AK ⋕ EM (verm. *Dat.*), so ist

ACJEGL = BDKFHM (Zus. 2)

und + ABJDEFLH = + ABJDEFLH

folglich ABCDEFGH = ABJKEFLM.

§. 151.

II. Wenn man ein Parallelepipedon mit einer Ebene parallel zu einer Seitenfläche durchschneidet, so verhalten sich die entstehenden kleinern Parallelepipeden zu einander, wie ihre Grundflächen.

Beweis: (Fig. 105.)

Th) AJCKELGM : JBKDLFMH = AK : JD.

D) AG ⋕ JM ⋕ BH.

Man wähle ein gemeinschaftliches Maas der Linien AJ und JB. Gesetzt dasselbe wäre in ersterer Linie m mal und

in letzterer n mal enthalten, so erhält man die Proportion

AJ : JB = m : n.

Legt man nun durch alle diese Theilungspunkte Parallebenen mit der Durchschnittsebene, so entstehen dadurch im Parallelepipedon AM, m und im Parallelepipedon JH, n kleine und congruente Parallelepipeden (§. 147) und man erhält:

AJCKELGM : JBKDLFMH = m : n.

Nun ist aber auch AJ : JB = m : n

folglich AJCKELGM : JBKDLFMH = AJ : JB und da endlich AK : JD = AJ : JB (§. 78) so ist

AJCKELGM : JBKDLFMH = AK : JD.

Zusätze:

1) Parallelepipeden von gleicher Höhe und mit proportionirten Grundflächen verhalten sich zu einander, wie zwey gleichliegende Kanten an den Grundflächen; d. h. (Fig. 105)
AJCKELGM : JBKDLFMH = AJ : JB; denn
AK : JD = AJ : JB (§. 78), und
AJCKELGM : JBKDLFMH = AK : JD (Lehrs.), woraus AJCKELGM : JBKDLFMH = AJ : JB folgt.

2) Alle dreyseitigen Prismen von gleicher Höhe und mit proportionirten Grundflächen verhalten sich, wie zwey gleichliegende Kanten an den Grundflächen. (Zus. 1 und §. 148 Zus. 1.)

3) Wenn man in einem Parallelepipedon zu einer Seitenfläche eine Parallelebene durchlegt, so verhält sich jeder der abgeschnittenen Theile zum ganzen Parallelepipedon, wie die Grundfläche des Theiles zu der des ganzen, oder wie eine Kante des Theiles zur ganzen gleichliegenden Kante. (Lehrs. und Zus. 1.)

4) Wenn man in einem Parallelepipedon zur Grundfläche eine Parallelebene durchlegt, so verhalten sich die abgeschnittenen Stücke, wie die Höhen derselben, oder wie zwey gleichliegende Seitenkanten; d. h. (Fig. 106)

ABCDEFGH : EFGHJKLM = NO : MN;

denn betrachtet man BM als Grundfläche, so ist ABCDEFGH : EFGHJKLM = BH : FM (Lehrs.). Da aber BH : FM = DH : HM (§. 78) und DH : HM = NO : MN (§. 57 Zus. 3), so ist auch

ABCDEFGH : EFGHJKLM = NO : MN.

5) Wenn man in einem Parallelepipedon zur Grundfläche eine Parallelebene durchlegt, so verhält sich jeder der abgeschnittenen Theile zum ganzen Parallelepipedon, wie die Höhe des Theils zur ganzen Höhe. (Zus. 3 u. 4.)

6) Alle Parallelepipeden mit congruenten Grundflächen verhalten sich wie ihre Höhen; d. h. (Fig. 107.)

ABCDEFGH : ABCDJKLM = EO : MN

denn erweitert man die Seitenflächen des Parallelepipedons ABCDEFGH nach oben, und die Ebene JM so weit, bis selbe die Erweiterungen von ABCDEFGH schneidet, so entsteht ein neues Parallelepipedon ABCDPQRS, welches gleich ABCDJKLM ist (§. 150); da nun

ABCDEFGH : ABCDPQRS = EO : PT (Zus. 5),

so ist auch, da

PT = MN, ABCDEFGH : ABCDPQRS = EO : MN.

7) Alle dreyseitigen Prismen mit congruenten Grundflächen verhalten sich wie ihre Höhen. (Zus. 6 und §. 148 Zus. 1.)

8) Alle Prismen mit congruenten Grundflächen verhalten sich wie ihre Höhen, denn man kann sie in drey-

seitige zerlegen (§. 148 Zus. 2), welche der Ordnung nach in diesem Verhältnisse stehen. (Zus. 7.)

§. 152.

III. Rechtwinklige Parallelepipeden mit gleichen (wenn auch unähnlichen) Grundflächen und gleicher Höhe sind sich gleich.

Beweis: (Fig. 108).

Th) ABCDEFGH = CKQLGJPM

D) AD = CL, AL ⫲ EM.

Man verlängere die Ebene BH und durchschneide damit das Parallelepipedon CKQLGJPM, so entsteht das Parellepipedon ABQOEFPN, in welchem

AH : CN = AD : CO *) (§. 151) oder

AH — CN : CN = AD — CO : CO (1ter Thl. §. 320 Satz 7) und im Parallelepipedon CM ist

CN : DM = CO : DL (§. 151), folglich

AH — CN + CN : CN + DM = AD — CO + CO : CO + DL oder ABCDEFGH : CKQLGJPM = AD : CL und da endlich AD = CL (verm. *Dat.*), so ist auch

ABCDEFGH = CKQLGJPM.

Zusätze:

1) Alle Parallelepipeden mit gleichen (wenn auch unähnlichen) Grundflächen und gleichen Höhen sind sich gleich; denn jedes schiefwinklige Parallelepipedon ist einem rechtwinkligen gleich. (§. 150 Zus. 4 und Lehrs. in diesem §.)

2) Alle dreyseitigen Prismen mit gleichen (wenn auch unähnlichen) Grundflächen und gleichen Höhen sind sich gleich. (Zus. 1 und §. 148 Zus. 1.)

*) Wenn wir des Raumes wegen das Parallelepipedon mit zwey Buchstaben bezeichnen.

3) Rechtwinklige Parallelepipeden mit gleichen Grundflächen verhalten sich wie ihre Höhen; d. h. (Fig. 109)

ABCDEFGH : ENSOJKLM = HF : MO;

denn verlängert man die Ebene CH und durchschneidet mit derselben das Parallelepipedon EM, so ist

ABCDEFGH = ENSOGPRQ (Lehrs.), und

ENSOGPRQ : ENSOJKLM = QO : MO (§. 151 Zus. 6), also, da auch QO = HF (§. 51 Zus. 5), so ist ABCDEFGH : ENSOJKLM = HF : MO.

4) Alle Parallelepipeden mit gleichen Grundflächen verhalten sich wie ihre Höhen (Zus. 3 u. §. 150 Zus. 4).

5) Rechtwinklige Parallelepipeden von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundflächen; d. h. (Fig. 108.)

ABCDEFGH : CKQLGJPM = AD : CL;

denn verlängert man die Ebene BH, und schneidet damit das Parallelepipedon CM, so ist

AH : CN = AD : CO *) (§. 151), oder

AH — CN : CN = AD — CO : CO (1ter Thl. §. 320 Satz 7) und da auch

CN : DM = CO : DL (§. 151), so ist

AH — CN + CN : CN + DM = AD — CO + CO : CO + DL oder

ABCDEFGH : CKQLGJPM = AD : CL.

6) Alle Parallelepipeden von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundflächen. (Zus. 5 und §. 150 Zus. 4.)

7) Alle Parallelepipeden von gleicher Höhe verhalten sich wie zwey gleichliegende Kanten an den Grundflächen. (Zus. 6 und §. 78.)

---

*) Wenn man der Kürze wegen das Parallelepipedon nur mit 2 Buchstaben bezeichnet.

8) Alle dreyseitigen Prismen von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundflächen. (Zus. 6 und §. 148 Zus. 1.)

§. 153.

IV. Jedes Prisma von beliebiger Seitenanzahl verhält sich zum dreyseitigen von gleicher Höhe ebenso wie ihre Grundflächen sich verhalten.

Beweis: (Fig. 110.)

Th) ABCDEFGHJK : LMNOPQ = ABCDEA : △ LMN
D) AF = LO (vorausgesetzt daß AF auf ABCDEA und LO auf △ LMN senkrecht stehe).

Man zertheile das mehrseitige Prisma durch Diagonalebenen in dreyseitige, so ist

ABEFGK : LMNOPQ = △ ABE : △ LMN
BEDGKJ : LMNOPQ = △ BED : △ LMN
BCDGHJ : LMNOPQ = △ BCD : △ LMN
} §. 152 Zus. 8.

woraus man durch Addition dieser Verhältnisse

ABCDEFGHJK : LMNOPQ = ABCDEA : △ LMN

erhält.

Zusatz: Jedes Prisma von beliebiger Seitenanzahl ist einem dreyseitigen gleich, welches mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat; denn diese Prismen verhalten sich wie ihre Grundflächen (verm. Lehrs.); sind nun letztere einander gleich, so sind es auch erstere.

§. 154.

V. Alle Prismen mit gleichen Grundflächen und Höhen sind sich gleich.

Beweis: (Fig. 111.)

Th) ABCDEFGHJK = LMNOPQRS.
D) ABCDEA = LMNOL, und die Höhen sind gleich.

Man zerlege das Prisma LR in Dreyseitige, so ist nach §. 153

ABCDEFGHJK : LMNPQR = ABCDEA : △ LMN
„ „ : LNOPRS = „ „ : △ LNO

woraus man durch Addition

ABCDEFGHJK : LMNOPQRS = ABCDEA : LMNOL

erhält. Nun ist

ABCDEA = LMNOL (verm. *Dat.*), also ist auch
ABCDEFGHJK = LMNOPQRS.

Zusätze:

1) Jedes Prisma ist einem Parallelepipedon gleich, das mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat.

2) Alle Prismen von gleichen Grundflächen verhalten sich wie ihre Höhen. (Zus. 1 und §. 152 Zus. 4.)

3) Alle Prismen von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundflächen. (Zus. 1 und §. 152 Zus. 6.)

§. 155.

VI. Alle Parallelepipeden verhalten sich zu einander, wie die Produkte aus ihren Grundflächen und Höhen.

Beweis: (Fig. 112.) Bezeichnet man das größere Parallelepipedon mit P, dessen Grundfläche mit B und dessen Höhe mit H, das kleinere Parallelepipedon mit p, dessen Grundfläche mit b und dessen Höhe mit h, so erhält man *Th)* P : p = B . H : b . h.

D) Man denke sich ein drittes Parallelepipedon Π mit derselben Grundfläche wie P und von derselben Höhe wie p, so erhält man

P : Π = H : h (§. 152 Zus. 4.)
und Π : p = B : b (§. 152 Zus. 6.)

also P : p = B . H : b . h.

Zusätze:

1) Alle Prismen verhalten sich zu einander, wie die Produkte aus ihren Grundflächen und Höhen. (§. 154 Zus. 1.)

2) Zwey ähnliche Prismen verhalten sich ihrer körperlichen Inhalte nach zu einander, wie die Cubuse zweyer gleichliegenden Kanten oder sonstiger Dimensionen; d. h. $P : p = A^3 : a^3$, wenn man die gleichliegenden Kanten oder sonstigen Dimensionen mit A und a bezeichnet; denn

$$B : b = A^2 : a^2 \quad (\text{§. } 95)$$
$$\text{und } H : h = A : a \quad (141 \text{ Zus. } 1)$$

mithin $B \cdot H : b \cdot h = A^3 : a^3$.

Nun ist auch $P : p = B \cdot H : b \cdot h$ (Lehrs.)

folglich $P : p = A^3 : a^3$.

§. 156.

ε) Ueber die Bestimmung des körperlichen Inhaltes der Prismen.

I. Der körperliche Inhalt eines jeden Parallelepipedons ist dem Produkte aus der Grundfläche und Höhe gleich.

Beweis: (Fig. 106).

Th) $ABCDJKLM = AD \times MO$.

D) Da alle Körper durch kleinere Körper, nehmlich durch die Einheit des Körpermaases, den Kubikfuß (1ter Theil §. 137), gemessen werden, und wenn man die Grundfläche eines Würfels von einem Kubikfuße mit b und dessen Höhe mit h bezeichnet, so ist

$ABCDJKLM : 1 = AD \times MO : bh$ (§. 155).

Nun ist $b = 1$ und $h = 1$ (1ter Theil §. 137).

Folglich $ABCDJKLM : 1 = AD \times MO : 1$

und $ABCDJKLM = AD \times MO$.

Zusätze:

1) Der körperliche Inhalt eines jeden rechtwinkligen Parallelepipedons ist dem Produkte aus seiner Länge, Breite und Höhe gleich, weil Länge und Breite die Grundfläche bestimmen. (§. 82 Zus. 2.)

2) Der körperliche Inhalt eines Hexaëdrons ist dem Kubuse aus einer Kante oder Seite gleich. (Zus. 1.)

§. 157.

II. Der körperliche Inhalt eines jeden Prismas ist dem Produkte aus der Grundfläche und Höhe gleich.

Beweis: Jedes Prisma ist einem Parallelepipedon gleich, das mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat (§. 154 Zus. 1), mithin gilt der, in §. 156 erwähnte Lehrsatz auch für alle Prismen.

Zusatz: Mehrere Prismen von gleicher Höhe sind zusammen einem einzigen gleich, welches dieselbe Höhe, aber die Summe aller Grundflächen der gegebenen Prismen zur eigenen Grundfläche hat; d. h. wenn man die Prismen P und p, deren Grundflächen mit B und b, und deren gemeinschaftliche Höhe mit h bezeichnet, so ist

$$P + p = Bh + bh \text{ (Lehrs.)} = (B + b) h.$$

B.

Der Cylinder.

§. 158.

a) Erklärungen.

Ein Cylinder (Fig. 92) ist ein geometrischer Körper, welcher von zwey congruenten parallellaufenden Kreisebenen und einer krummen Fläche begränzt ist. Es ist demnach

ein Cylinder nichts anderes als ein Prisma, dessen Grundflächen zwey Kreisebenen sind. Diejenige gerade Linie EF, welche die Mittelpunkte der Grundflächen miteinander verbindet, heißt die Achse des Cylinders. Steht selbe senkrecht auf den Grundflächen, so heißt der Cylinder senkrecht, wo nicht, schief. Die Höhe des Cylinders ist die Senkrechte von einer Grundfläche auf die andere. Eine gerade Linie vom Umkreise einer Grundfläche an jenen der andern heißt die Seite des Cylinders.

Ist in einem Cylinder diese Seite dem Diameter einer Grundfläche gleich, so nennt man den Cylinder gleichseitig.

§. 159.

b) Postulat.

Jeder Cylinder hat nur eine einzige krumme Seitenfläche.

Zusatz: In einem senkrechten Cylinder ist die Seitenfläche einem Rechtecke von derselben Höhe gleich, welches die Peripherie einer Grundfläche zur Grundlinie hat. (Post. und §. 158.)

§. 160.

c) Lehrsätze.

α) Ueber die Bestimmung der Oberfläche bey Cylinder.

Die Oberfläche eines senkrechten Cylinders ist gleich der Summe aus der doppelten Grundfläche mit einem Rechtecke, das zur Grundlinie die Peripherie der Grundfläche und zur Höhe jene des Cylinders hat.

Beweis: Stellt man sich das Netz eines senkrechten Cylinders vor (§. 138), so erhält man die Fig. 113, welche alle Gränzflächen eines Cylinders enthält (§. 158 u. 159), also die Oberfläche desselben darstellt (§. 142). Diese Ober-

fläche besteht demnach aus der doppelten Grundfläche des Cylinders und einem Rechtecke, das zur Grundlinie die Peripherie der Grundfläche und zur Höhe jene des Cylinders hat.

Zusatz. Setzt man den Radius einer Grundfläche = r, und die Höhe des Cylinders = h, so erhält man *Oberfl.* $= 2r^2\pi + 2r\pi h$ (§. 82, 115 Zus. 1 und 117) $= 2r\pi\,(r + h)$.

§. 161.

β) Ueber die Vergleichungen der Cylinder, und die Bestimmung ihrer körperlichen Inhalte.

Ein jeder Cylinder ist einem unendlichseitigen Prisma von gleicher Grundfläche und Höhe gleich.

Beweis: Die Grundflächen eines Cylinders sind congruente reguläre Vielecke von unendlich vielen Seiten (§. 112 Zus. 2 und §. 102 Zus. 4), und es ist daher die krumme Seitenfläche unendlich viel congruenten Parallelogrammen gleich (§. 143). Mithin ist jeder Cylinder einem unendlichseitigen Prisma von gleicher Grundfläche und Höhe gleich.

Zusätze:

1) Zwey Cylinder von gleicher Höhe, deren Grundflächen gleiche Radien haben, und deren Seiten gegen die Grundflächen gleich geneigt sind, sind congruent. (§. 102 Zus. 4 und §. 147.)

2) Senkrechte Cylinder sind congruent, wenn ihre Grundflächen gleiche Radien haben, und ihre Achsen gleich sind, weil dann letztere die Höhen angeben. (Zus. 1.)

3) Wenn man einen Cylinder durch eine Ebene parallel zu seiner Grundfläche schneidet, so ist die Durchschnittsebene ein, zur Grundfläche congruenter Kreis (Lehrs. und §. 148).

4) Wenn man eine Seite oder die Höhenlinie eines Cylinders in mehrere gleiche Theile scheidet, und durch die Theilungspunkte parallel zur Grundfläche Ebenen durchlegt, so wird der ganze Cylinder in eben so viel congruente Cylinder getheilt, als die Anzahl der Theilungspunkte beträgt (Zus. 1 u. 3).

5) Alle Cylinder von gleicher Höhe, deren Grundflächen gleiche Radien haben, sind sich gleich (Lehrs. und §. 150 Zus. 3).

6) Alle Cylinder, deren Grundflächen gleiche Radien haben, verhalten sich wie ihre Höhen (Lehrs. und §. 151 Zus. 8).

7) Alle Cylinder von gleicher Höhe verhalten sich wie die Quadrate der Radien ihrer Grundflächen; denn

$$\text{Cyl} : \text{cyl} = R^2\pi : r^2\pi \quad (\text{§. 154 Zus. 3})$$
$$= R^2 : r^2$$

8) Alle Cylinder verhalten sich zu einander, wie die Produkte aus dem Quadrate der Radien ihrer Grundflächen mit ihren Höhen; denn

$$\text{Cyl} : \text{cyl} = R^2\pi\, H : r^2\pi\, h \quad (\text{§. 155 Zus.})$$
$$\text{oder} = R^2\, H : r^2\, h.$$

9) Der Kubikinhalt eines Cylinders ist dem Produkte aus einer Grundfläche mit der Höhe gleich (§. 157), nehmlich Cyl $= r^2\pi\, h$ oder $\frac{1}{4}\, d^2\pi\, h$.

10) Zwey ähnliche Cylinder verhalten sich ihrer Inhalte nach zu einander wie die Kubuse der Radien ihrer Grundflächen; denn

$$\text{Cyl} : \text{cyl} = R^2H : r^2h \quad (\text{Zus. 8}) \text{ und}$$
$$H : h = R : r \quad (\text{§. 141 Zus. 1}) \text{ mithin}$$

$$H\,\text{Cyl} : h\,\text{cyl} = R^3H : r^3h \text{ oder}$$
$$\text{Cyl} : \text{cyl} = R^3 : r^3.$$

C.

Die Pyramide.

§. 162.

a) Erklärungen.

Derjenige geometrische Körper, welcher von einer beliebigen geradlinigen Ebene, und von so vielen geradlinigen Dreyecken, welch' letztere sich in einer Spitze vereinigen, begränzt ist, als erstere Ebene Seiten hat, heißt eine Pyramide (Fig. 95). Die beliebige geradlinige Ebene ist die Grundfläche, und die übrigen begränzenden Dreyecke sind die Seitenflächen der Pyramide. Der Vereinigungspunkt der letzteren heißt die Spitze, und die Senkrechte DE von derselben auf die Grundfläche die Höhe der Pyramide.

§. 163.

Man benennt die Pyramiden nach der Anzahl der Seiten ihrer Grundflächen dreyseitig, vierseitig ꝛc. Eine Pyramide heißt gleichseitig, wenn ihre Grundfläche eine reguläre Ebene und ihre Seitenflächen lauter congruente gleichschenklige Dreyecke sind, regulär aber, wenn ihre Grundfläche und die Seitenflächen lauter congruente reguläre Dreyecke sind. Das Tetraëdron ist die einzige reguläre Pyramide.

Wenn man eine Pyramide durch eine Ebene parallel zur Grundfläche schneidet, so nennt man das übrigbleibende untere Stück eine abgekürzte Pyramide (Fig. 114 AB CDE FGH), und die senkrechte Entfernung KL der beyden parallelen Ebenen ihre Höhe.

§. 164.

b) Postulat.

Jede Pyramide hat so viele Seitenflächen als ihre Grundfläche Seiten oder Winkel hat.

Zusatz: Es gibt keine Pyramide, welche weniger als 3 Seitenflächen hat (§. 40 Zus. 3).

§. 165.

b) Lehrsätze.

α) Ueber die Bestimmung der Oberfläche bey Pyramiden.

Die Oberfläche einer Pyramide ist der Summe aus der Grundfläche mit allen Seitenflächen gleich.

Beweis: Stellt man sich das Netz einer Pyramide vor, so erhält man dasselbe aus der Grundfläche und den Seitenflächen der Pyramide gebildet, deren Summe die Oberfläche der Pyramide geben. (§. 138 u. 142.)

Zusätze:

1) Bey einer gleichseitigen Pyramide ist die Oberfläche gleich der Summe aus der Grundfläche mit einem Dreyecke, welches den Perimeter der Grundfläche zur Grundlinie und die Höhe eines Seitendreyecks zu seiner eigenen Höhe hat. (§. 163 und §. 67 Zus. 2.)

2) Beym Tetraëdron ist die Oberfläche dem vierfachen Produkte aus einer Gränzfläche gleich (§. 136 und 142 Zus. 2).

3) Bezeichnet man in einem Tetraëdron die Kante mit a, so ist der Inhalt einer Gränzfläche (Fig. 86)

$$\triangle ADC = \frac{AC \times DE}{2} \quad (§.\ 67)$$

$$= \frac{a \times DE}{2} = \frac{a}{2} \sqrt{(a^2 - \tfrac{1}{4} a^2)} \quad (§.\ 119\ \text{Zus.}\ 3)$$

$= \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3}$. Folglich ist die Oberfläche des Tetraëdrons $= a^2 \sqrt{3}$ (§. 142 Zus. 2).

4) Die Oberfläche einer abgekürzten Pyramide ist gleich der Summe aus den zwey Parallelebenen mit allen Seitenflächen. (§. 138 und 142.)

5) In einer abgekürzten Pyramide sind die Seitenflächen lauter Trapeze, denn die Durchschnittsebene ist parallel zur Grundfläche (§. 163), also sind auch alle gleichliegenden Seiten in beyden zu einander parallel (§. 132 Zus. 8), und die Seitenflächen sind daher Trapeze (§. 70).

6) Man bekömmt daher die Oberfläche einer abgekürzten gleichseitigen Pyramide, indem man das Produkt aus der halben Summe der Perimeter von den zwey Parallelebenen mit der Höhe eines Trapezes nimmt, und zu den beyden Parallelebenen addirt. (§. 86 Zus.)

§. 166.

β) Ueber die Beschaffenheit gerader Linien und Ebenen in Pyramiden.

I. Bey einer jeden abgekürzten Pyramide ist die obere Parallelebene mit der Grundfläche der Pyramide ähnlich.

Beweis: (Fig. 114.)

Th) EG ∽ AC

Dat.) EG # AC, folglich EF # AB, FG # BC GH # CD und EH # AD (§. 132 Zus. 8), mithin ABC = EFG, BCD = FGH, CDA = GHE, und DAB = HED (§. 128). Nun ist

AB : EF = BJ : FJ
und BC : FG = BJ : FJ } (§. 58)

also AB : EF = BC : FG. Auf dieselbe Art erhält man auch noch die Proportionen BC : FG = CD : GH = AD : EH. Mithin ist EG ∽ AC (§. 90).

Zusätze:

1) Wenn man in einer Pyramide zur Grundfläche eine Parallelebene durchlegt, so ist die Durchschnittsebene mit der Grundfläche ähnlich.

2) Wenn man eine Pyramide durch eine Ebene parallel zur Grundfläche schneidet, so ist die obere kleinere Pyramide zur ganzen ähnlich; denn die körperlichen Winkel sind der Ordnung nach congurent (§. 135), die beyden Grundflächen sind sich ähnlich (Lehrs.), so wie auch alle Seitenflächen der Ordnung nach (§. 60 Zus. 4), folglich sind die Pyramiden ähnlich (§. 141).

§. 167.

II. Wenn man eine Pyramide durch eine oder mehrere Ebenen zur Grundfläche parallel schneidet, so verhalten sich die Durchschnittsebenen wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Spitze.

Beweis: (Fig. 114.)

Th.) $AC : EG = JL^2 : JK^2$

Dat.) $EG \# AC$ mithin $EG \sim AC$ (§. 166 Zus. 1): und $AC : EG = AB^2 : EF^2$ (§. 95).

Ferners ist $AJ : EJ = AB : EF$ (58.), also auch $AJ^2 : EJ^2 = AB^2 : EF^2$ (1ter Theil §. 320 Satz 9.) und folglich $AC : EG = AJ^2 : EJ^2$. Legt man durch AIL eine Ebene, so wird $AL \# EK$ (§. 132 Zus. 8.), und man erhält $\triangle ALJ \sim \triangle EKJ$ (§. 60 Zus. 4), weßhalb

$AJ : EJ = JL : JK$ (§. 57. Zus. 3.)

oder $AJ^2 : EJ^2 = JL^2 : JK^2$ (1ter Th. §. 320 Satz 9.)

Nun ist aber $AC : EG = AJ^2 : EJ^2$

---

folglich $AC : EG = JL^2 : JK^2$.

Zusätze:

1) Nimmt man die Entfernung der beyden Parallelebenen von einander, d. h. die Höhe einer abgekürzten Pyramide als unendlich klein an, so kömmt die ab-

gekürzte Pyramide einem Prisma mit gleicher Grundfläche und von unendlich kleiner Höhe so nahe, daß man diese abgekürzte Pyramide als ein solches Prisma betrachten kann; denn je näher das Verhältniß $JL^2 : JK^2$ (Lehrs.) der Gleichheit kömmt, desto mehr nähert sich auch jenes zwischen AC und EG der Gleichheit.

2) Wenn man eine Pyramide mit unendlich viel, zur Grundfläche parallelen Ebenen durchschneidet, so wird die Pyramide dadurch in unendlich viele Prismen zerlegt (Zus. 1).

3) Eine abgekürzte Pyramide von unendlich kleiner Höhe gleicht einem Prisma von derselben Grundfläche und Höhe (Zus. 1).

4) Wenn man zwey Pyramiden von gleicher Höhe und mit gleichen (wenn auch unähnlichen) Grundflächen auf gleiche Entfernungen von den Spitzen mit einer Ebene parallel zu den Grundflächen durchscheidet, so sind die zwey Durchschnittsebenen ebenfalls einander gleich; d. h. (*Fig.* 115) $\triangle$ LMN = OQ, wenn CD # AB und $\triangle$ EFG = HK denn

$$\left.\begin{aligned}\triangle EFG : \triangle LMN &= SU^2 : ST^2 \\ \text{und } HK : OQ &= YW^2 : YV^2\end{aligned}\right\} \text{(Lehrs.)}$$

$$\text{oder} = SU^2 : ST^2 \text{, weil}$$

YW = SU und YV = ST (verm. *Dat.*), mithin ist auch $\triangle$ EFG : $\triangle$ LMN = HK : OQ. Nun ist aber $\triangle$ EFG = HK (verm. *Dat.*), folglich ist auch $\triangle$ LMN = OQ

§. 168.

γ) Ueber die Gleichheit der Pyramiden, ihre Vergleichungen, und die Bestimmung ihrer körperlichen Inhalte.

I. Alle Pyramiden mit gleichen Grundflächen und von gleicher Höhe sind einander gleich.

Beweis: (Fig. 115.)

Th.) SEFG = YHIKX.

Dat.) △ EFG = HK und SU = YW.

Man denke sich die Höhenlinien in unendlich viel gleiche Theile getheilt, und durch die Theilungspunkte lauter Parallelebenen zu den Grundflächen, so werden beyde Pyramiden ebenfalls in unendlich viel unendlich kleine Prismen von gleicher Höhe getheilt (§. 167. Zus. 2), welche in beyden Pyramiden der Ordnung nach gegenseitig gleiche Grundflächen haben (§. 167 Zus. 4) und also gleich sind (§. 154).

Da nun beyde Pyramiden aus gleich viel solchen Prismen bestehen, so ist auch die Summe aller Prismen einer Pyramide der Summe aller Prismen der andern Pyramide gleich; nehmlich

SEFG = YHIKX.

§. 169.

II. Jede dreyseitige Pyramide ist der dritte Theil eines Prismas, welches dieselbe Höhe hat, und mit ihm auf der nehmlichen Grundfläche ruhet.

Beweis: (Fig. 116.)

Th.) ABCE = $\frac{1}{3}$ ABCDEF

Dat.) △ ABC ≌ △ ABC und DEF # ABC.

Man lege durch A, E und C eine Ebene, so erhält man die Pyramide ABCE, welche mit dem Prisma dieselbe Grundfläche und Höhe hat. Legt man auch durch D, E und C eine Ebene, so erhält man aus dem übrigen Theile des Prismas noch die zwey Pyramiden DACE und DEFC, von welchen DE FC = ABCE, weil sie gleiche Höhe und an △ DEF und △ ABC gleiche Grundflächen haben (§. 168). Betrachtet man das △ DCF als Grundfläche von DEFC und das △ DAC als jene von DACE, so sind beyde Pyramiden sich gleich, denn sie haben gleiche Grundflächen (§. 75 Zus. 2)

und weil sich ihre Spitzen in E vereinigen auch gleiche Höhe (§. 126 Zus. 3); folglich ist ABCE = DEFC = DACE oder ABCE = $\frac{1}{3}$ ABCDEF.

Zusätze:

1) Jede Pyramide ist der dritte Theil eines Prismas von gleicher Grundfläche und Höhe; denn jede Pyramide ist einer dreyseitigen Pyramide (§. 168), so wie jedes Prisma einem dreyseitigen Prisma (§. 153 Zus.) von gleicher Grundfläche und Höhe gleich. (Lehrs.)

2) Alle Pyramiden mit gleichen Grundflächen verhalten sich wie ihre Höhen (Lehrs. und §. 154 Zus. 2).

3) Alle Pyramiden von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundflächen (Lehrs. und §. 154 Zus. 3).

4) Alle Pyramiden verhalten sich zu einander wie die Produkte aus ihren Grundflächen und Höhen (Lehrs. und §. 155 Zus. 1).

5) Der körperliche Inhalt einer jeden Pyramide ist dem dritten Theile des Produktes aus der Grundfläche mit der Höhe gleich (Lehrs. und §. 157).

6) Der körperliche Inhalt eines Tetraëdrons ist der zwölfte Theil des Produktes aus dem Cubuse einer Seite mit $\sqrt{2}$; denn (Fig. 86) *Tetr.* = $\frac{1}{3}$ $\triangle$ ABC $\times$ DF (Zus. 5) = $\frac{1}{12}$ $a^2 \sqrt{3} \times$ DF (§. 165 Zus. 3). $DF^2 = CD^2 - CF^2 = a^2 - CF^2$ Betrachtet man z als die Seite eines Sechseckes in einem Kreise, zu welchen auch $\triangle$ ABC gehört, so ist

$$a = \frac{z}{CF} \sqrt{[(2CF+z)(2CF-z)]}$$ (§. 115 Zus. 3.)

Als Seite eines Sechseckes ist z = CF, also $a = \sqrt{3CF^2} = CF\sqrt{3}$ und daraus $CF^2 = \frac{1}{3}a^2$; mithin ist $DF^2 = a^2 - \frac{1}{3}a^2 = \frac{2}{3}a^2$ und DF = a

$\sqrt{\frac{2}{3}}$. Folglich ist *Tetr* $= \frac{1}{12} a^2 \sqrt{3} \times a \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{12} a^3 \sqrt{2}$.

7) Mehrere Pyramiden von gleicher Höhe sind zusammen einer einzigen von derselben Höhe gleich, deren Grundfläche allen gegebenen Grundflächen zusammen genommen gleich ist. (Lehrs. und §. 157 Zus.)

8) Aehnliche Pyramiden verhalten sich ihrem Inhalte nach zu einander, wie die Kubuse gleichliegender Kanten oder sonstiger Dimensionen (Lehrs. und §. 155 Zus. 2).

§. 170.

III. Der Kubikinhalt einer jeden abgekürzten Pyramide ist gleich dem dritten Theile aus dem Produkte der Höhe mit der Summe beyder Grundflächen und der mittleren geometrischen Proportionszahl zwischen denselben.

Beweis: (Fig. 114.)

Bezeichnet man die Grundfläche mit B, die dazu parallele Ebene mit b, und die Höhe KL mit h, so ist

Th.) Abgek. *Pyr.* $= \frac{1}{3}h\,(B + b + \sqrt{Bb})$.

Dat.) Man ergänze die ganze Pyramide, so ist Abgek. *Pyr.* $=$ ABCDJ—EFGHJ, und $B : b = JL^2 : JK^2$ (§. 167). Setzt man $JK = x$, so ist $JL = h + x$, folglich $B : b = (h^2 + 2h\,x + x^2) : x^2$, und

$$Bx^2 = bh^2 + 2bhx + bx^2$$

$$Bx^2 - bx^2 - 2bhx = bh^2$$

$$x^2 - \frac{2bh}{B-b}\,x = \frac{bh^2}{B-b}, \text{ woraus}$$

$$x = \frac{bh + h\sqrt{Bb}}{B - b}, \text{ also}$$

$$JL \text{ oder } h + x = \frac{Bh - bh + bh + h\sqrt{Bb}}{B - b} =$$

$$= \frac{Bh + h\sqrt{Bb}}{B - b}$$ Da nun $ABCDJ = \frac{1}{3}B\,(h + x)$

(§. 169 Zus. 5), so ist Abgek. *Pyr.* $= \frac{1}{3} B \left(\frac{Bh + h\sqrt{Bb}}{B - b}\right)$

$$- \frac{1}{3}b \left(\frac{bh + h\sqrt{Bh}}{B - b}\right) = \frac{B^2 h + Bh\sqrt{Bb}}{3(B - b)} -$$

$$- \frac{b^2 h + bh\sqrt{Bb}}{3(B - b)} = \frac{B^2 h + Bh\sqrt{Bb} - b^2 h - bh\sqrt{Bb}}{3(B - b)} =$$

$$= \frac{1}{3}h \left(\frac{B^2 + B\sqrt{Bb} - b^2 - b\sqrt{Bb}}{B - b}\right) =$$

$$= \frac{1}{3} h (B + b + \sqrt{Bb}).$$

D.

Der Kegel.

§. 171.

a) Erklärungen.

Derjenige geometrische Körper, welcher von einer Kreisebene und von einer krummen Fläche so begränzt ist, daß letztere sich, der Kreisebene gegenüber, in eine Spitze endet (Fig. 94), wird ein Kegel genannt. Es ist demnach der Kegel eine Pyramide, deren Grundfläche ein Kreis ist. Diejenige gerade Linie, vom Mittelpunkte der Grundfläche bis an die Spitze gezogen, heißt die Achse des Kegels. Steht die Achse senkrecht auf der Grundfläche, so nennt man den Kegel senkrecht, übrigens aber schief. Die senkrechte Linie von der Spitze auf die Grundfläche heißt die Höhe des Kegels. Eine gerade Linie von der Spitze des Kegels an einen Punkt der Peripherie der Grundfläche nennt man die Seite des Kegels.

§. 172.

Hat ein Kegel nach allen Richtungen zu gleiche Seiten und sind dieselben dem Diameter der Grundfläche gleich, so heißt derselbe gleichseitig, sind nur die Seiten gleich, gleichschenklig, übrigens aber schief. Wenn man einen Kegel durch eine Ebene parallel zur Grundfläche schneidet, so nennt man das übrigbleibende untere Stück des ganzen Kegels einen abgekürzten Kegel, und die Entfernung der beyden parallelen Ebenen von einander, dessen Höhe.

§. 173.

b) Lehrsätze.

α) Ueber die Bestimmung der Oberfläche bey Kegeln.

Die Oberfläche eines senkrechten Kegels ist gleich der Summe aus der Grundfläche und dem halben Produkte des Umkreises der Grundfläche mit der Seite des Kegels.

Beweis: Stellt man sich das Netz eines senkrechten Kegels vor (§. 138), so erhält man die Figur 117, die aus der Grundfläche (Kreis) und einem gleichschenkeligen Dreyecke ABC besteht, welch' letzteres die Peripherie der Grundfläche zu seiner Grundlinie und die Seite AD des Kegels zu seiner Höhe hat. Folglich ist die Oberfläche eines senkrechten Kegels gleich der Summe aus der Grundfläche und dem halben Produkte des Umkreises der Grundfläche mit der Seite des Kegels (§. 67 und 142 Zus. 1).

Zusätze:

1) Setzt man den Radius der Grundfläche = r, und die Seite des senkrechten Kegels = a, so ist die Oberfläche desselben

$$= r^2\pi + \frac{2r\pi a}{2}$$ (§. 117 und 67)

$$= r\pi(r + a).$$

2) Ist in einem senkrechten Kegel anstatt der Seite die Höhe des Kegels $= h$ nebst dem Radius der Grundfläche gegeben, so ist dann (Fig. 94) die Seite a $= \sqrt{(CD^2 + AC^2)}$ (§. 119) $= \sqrt{h^2 + r^2}$; folglich ist die Oberfläche $= r\pi(r + \sqrt{h^2 + r^2})$ (Zus. 1.)

3) In einem senkrechten abgekürzten Kegel ist die krumme Seitenfläche einem Trapeze gleich, dessen parallelen Seiten die Peripherien der Grundfläche und der obern dazu parallelen Kreisebene sind (§. 165 Zus. 5 und 6).

4) Die Oberfläche eines senkrechten abgekürzten Kegels ist gleich dem Produkte aus der halben Summe der Peripherien beyder Parallelebenen mit der Seite des abgekürzten Kegels zu den beyden Parallelebenen addirt; nämlich, wenn R und r die Radien der parallelen Kreisebenen sind und a die Seite des abgekürzten Kegels ist, so ist die Oberfläche $=$ $\frac{(2R\pi + 2r\pi)\,a}{2} + R^2\pi + r^2\pi$ (§. 142) woraus man nach näherer Reducirung $\pi(R + r)a + \pi(R^2 + r^2)$ $= \pi\,[(R + r)\,a + (R^2 + r^2)]$ erhält.

§. 174.

β) Ueber die Vergleichungen der Kegel und die Bestimmung ihrer körperlichen Inhalte.

I. Jeder Kegel ist einer unendlichseitigen Pyramide von gleicher Grundfläche und Höhe gleich.

Beweis: Die Grundfläche eines jeden Kegels ist ein reguläres Vieleck von unendlich vielen Seiten (§. 112 Zus. 2), und es ist daher die krumme Seitenfläche unendlich vielen Dreyecken gleich (§. 162). Mithin ist jeder Kegel einer unendlichseitigen Pyramide von gleicher Grundfläche und Höhe gleich.

Zusätze:

1) Zwey Kegel von gleicher Höhe, deren Grundflächen gleiche Radien haben, und deren Seiten überall gegen die Grundflächen gleich geneigt sind, sind congruent (§. 102 Zus. 4 und §. 141 Zus. 2).

2) Wenn man einen Kegel parallel zu seiner Grundfläche schneidet; so ist die Durchschnittsebene ein Kreis (§. 165 Zus. 1).

3) Wenn man einen Kegel durch eine Ebene parallel zur Grundfläche schneidet, so ist der oben kleinere Kegel dem ganzen ähnlich (§. 166 Zus. 2).

4) Wenn man einen Kegel durch eine oder mehrere Ebenen parallel zur Grundfläche schneidet, so verhalten sich die parallelen Kreisebenen wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Spitze (§. 167). Oder die Radien der parallelen Kreisebenen verhalsich ebenso, wie die Entfernungen von der Spitze; denn (Fig. 94) $R^2\pi : r^2\pi = H^2 : h^2$ (§. 167), wenn man $CD = H$ und $DE = h$ setzt, oder $R^2 : r^2 = H^2 : h^2$ oder $R : r = H : h$ (1ter Thl. §. 320 Satz 9).

5) In ähnlichen Kegeln verhalten sich ihre Höhen, wie die Radien ihrer Grundflächen (Zus. 3 und 4).

6) Ein abgekürzter Kegel von unendlich kleiner Höhe ist einem Cylinder von derselben Grundfläche und Höhe gleich (§. 167 Zus. 3).

7) Wenn man zwey Kegel von gleicher Höhe, deren Grundflächen gleiche Radien haben, auf gleiche Entfernungen von den Spitzen durch eine Ebene schneidet, so sind die zwey Durchschnittskreise sich congruent (§. 167 Zus. 4); denn sie haben gleiche Radien (§. 102 Zus. 4).

8) Alle Kegel von gleicher Höhe, deren Grundflächen gleiche Radien haben, sind einander gleich (§. 168).

9) Jeder Kegel ist einer Pyramide mit gleich großer Grundfläche und Höhe gleich (Lehrs. und §. 168).

10) Jeder Kegel ist der dritte Theil eines Cylinders oder Prisma's von gleicher Grundfläche und Höhe (Lehrs. und §. 169 Zus. 1).

11) Alle Kegel und Pyramiden mit gleichen Grundflächen verhalten sich wie ihre Höhen (Lehrs. und §. 169 Zus. 2).

12) Alle Kegel und Pyramiden von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundflächen (Lehrs. und §. 169 Zus. 3).

13) Alle Kegel von gleicher Höhe verhalten sich zu einander, wie die Quadrate der Radien ihrer Grundflächen; denn
$K : k = R^2 \pi : r^2 \pi$ (Zus. 12) $= R^2 : r^2$.

14) Alle Kegel verhalten sich zu Pyramiden, wie die Produkte aus ihren Grundflächen und Höhen (Lehrs. und §. 169 Zus. 4).

15) Alle Kegel verhalten sich zu einander, wie die Produkte aus den Höhen mit den Quadraten der Radien ihrer Grundflächen; denn $K : k = R^2 \pi H : r^2 \pi h$ (Zus. 14) $= R^2 H : r^2 h$.

16) Der Kubikinhalt eines jeden Kegels ist dem dritten Theile des Produktes aus der Grundfläche mit der der Höhe gleich (§. 169 Zus. 5).

17) Mehrere Kegel von gleicher Höhe sind einem einzigen Kegel oder einer einzigen Pyramide von derselben Höhe gleich, wozu die Grundfläche der Summe aller gegebenen Grundflächen gleich ist (Lehrs. und §. 169 Zus. 7).

18) Aehnliche Kegel verhalten sich zu einander, wie die Kubuse der Radien ihrer Grundflächen; denn

$K : k = R^2 H : r^2 h$ (Zus. 15) und

$H : h = R : r$ (§. 141 Zus. 1), mithin

$H.K : h.k = R^3 H : r^3 h$ oder

$K : k = R^3 : r^3$.

§. 175.

II. Der Kubikinhalt eines jeden abgekürzten senkrechten Kegels ist gleich der Summe aus den Quadraten der Radien beyder parallelen Kreisebenen und der mittleren geometrischen Proportionalzahl zwischen den Quadraten dieser Radien, multiplizirt mit dem dritten Theile des Produktes aus der Höhe und Ludolphischen Zahl.

Beweis: (Fig. 94.) Bezeichnet man die beyden Radien mit R und r, und die Höhe CE mit h, so ist

Th). Abgek. Kegel $= \frac{1}{3} h\pi(R^2 + r^2 + Rr)$.

Dat.) Betrachtet man den abgekürzten Kegel als eine abgekürzte Pyramide (§. 174), so erhält man nach §. 170

Abgek. Kegel $= \frac{1}{3} h (R^2\pi + r^2\pi + \sqrt{R^2 r^2 \pi^2})$

$= \frac{1}{3} h (R^2\pi + r^2\pi + Rr\pi)$

$= \frac{1}{3} h\pi (R^2 + r^2 + Rr)$.

E.

Die Kugel.

§. 176.

a) Erklärungen.

Die Kugel ist jener geometrische Körper, welcher von einer einzigen krummen Fläche so begränzt ist, daß selbe in allen Punkten gleich weit von einem Punkte innerhalb des Körpers entfernt ist (Fig. 95). Derjenige Punkt, von welchem alle Punkte an der Oberfläche oder Gränzfläche gleich weit abstehen, heißt der Mittelpunkt, und jede gerade Linie von demselben an einen beliebigen Punkt der Oberfläche der Radius der Kugel. Jede gerade Linie von einem Punkte der Oberfläche bis zu einem andern wird eine Sehne, und jede, durch den Mittelpunkt gezogene Sehne der Diameter oder Durchmesser der Kugel genannt.

§. 177.

Diejenigen Theile ADB und AEB einer Kugel (Fig. 95), welche entstehen, wenn man letztere mit einer Ebene durchschneidet, heißen Kugelabschnitte oder Kugelsegmente. Jener kegelförmige Theil ADBC einer Kugel, welcher zu seiner Grundfläche die krumme Oberfläche eines Kugelabschnittes, und zu seiner Höhe und seinen Seiten den Radius der Kugel hat, heißt ein Kugelausschnitt oder Kugelsector; und jener Theil ABFG der Kugeloberfläche, welcher zwischen zwey parallelen Durchschnittsebenen liegt, wird ein Kugelgürtel oder eine Zone (Zona, ζώνη) genannt.

Wenn man durch den Mittelpunkt der Kugel eine Ebene legt, und auf selbe den Diameter der Kugel sich

senkrecht gezogen denkt, so heißt dieser Diameter DE die **Achse**, und die Endpunkte D und E desselben heißen die beyden **Pole der Durchschnittsebene.**

§. 178.

b) **Postulat.**

Alle Radien oder Diameter in einer und derselben Kugel sind sich gleich.

Zusätze:

1) Alle congruenten Kugeln haben gleiche Radien oder Diameter.

2) Alle Kugeln mit gleichen Radien oder Diametern sind congruent.

§. 179.

c) **Lehrsätze.**

α) Ueber die Lage und Größe gerader Linien und Ebenen in Kugeln.

Eine jede Durchschnittsebene in einer Kugel nach was immer für einer Richtung ist ein Kreis.

Beweis: (Fig. 95.) Um zu zeigen, daß jede Durchschnittsebene z. B. AMBNA ein Kreis ist, nehme man an der Gränze derselben mehrere beliebige Punkte A, B, M N ꝛc. an, so müssen dieselben von einem Punkte in der Ebene gleich weit abstehen (§. 98). Man denke sich vom Mittelpunkte der Kugel CP senkrecht auf die Ebene, und nehme den Durchschnittspunkt P als den Mittelpunkt der Kreisebene an, so müssen, wenn man AP, BP, MP und NP zieht, diese Linien Radien dieser Kreisebene seyn, und man erhält daher

Th.) AP = BP = MP = NP (§. 102 Zus. 1).

Dat.) Man ziehe AC, BC, MC und NC, so sind, da CP auf der Durchschnittsebene senkrecht steht, die Dreyecke APC, BPC, MPC uud NPC rechtwinkelig (126 Zus. 1), folglich

$$\left.\begin{array}{l} AP^2 = AC^2 - CP^2 = r^2 - CP^2, \text{ weil } AC = r^{*}) \\ BP^2 = BC^2 - CP^2 = r^2 - CP^2, \text{ „ } BC = r \\ MP^2 = MC^2 - CP^2 = r^2 - CP^2, \text{ „ } MC = r \\ NP^2 = NC^2 - CP^2 = r^2 - CP^2, \text{ „ } NC = r \end{array}\right\} \text{(§. 119 Zus. 5.)}$$

woraus $AP^2 = BP^2 = MP^2 = NP^2$, und
$AP = BP = MP = NP$ folgt.

Mithin ist die Durchschnittsebene ein Kreis, dessen Mittelpunkt P ist.

Zusätze:

1) Eine jede Senkrechte aus dem Mittelpunkt einer Kugel auf einen Durchschnittskreis geht durch den Mittelpunkt des Letzteren.

2) Die Durchschnittskreise, welche man Kugelkreise nennt, werden um so größer, je näher der Durchschnitt dem Mittelpunkte der Kugel kömmt, denn der Radius des Kugelkreises, z. B. AP wird nach §. 119 Zus. 3 um so größer, je kleiner CP wird, und würde am Größten, wenn CP = o wäre, d. h. AP mit FC zusammenfiele. Es ist demnach ein Kugelkreis, welcher durch den Mittelpunkt der Kugel geht, der der möglichst größte Kugelkreis.

3) Alle Kugelkreise, welche gleich weit, vom Mittelpunkte der Kugel abstehen, sind gleich; d. h. (Fig 95) STR = AMBN, wenn CP = CQ; denn da nebst diesem auch noch CB = CR (§. 178) und CPB =

*) Als Radius der Kugel.

CQR (als Rechte, §. 126 Zus. 1), so ist △ CPB ≌ △ CQR, (§. 49) also BP = RQ, woraus STR = AMBN folgt (§. 102 Zus. 4).

4) Alle größten Kugelkreise sind einander gleich; denn sie haben alle den Radius der Kugel zu ihrem eigenen (§. 102 Zus. 4).

5) Jeder größte Kugelkreis theilt die Kugel in zwey congruente Theile (Halbkugeln, Hemisphären); denn der größte Kugelkreis kömmt beyden zu, und die Oberflächen fallen genau aufeinander, weil sie in allen Punkten gleich weit vom Mittelpunkte abstehen (Zus. 4 und §. 176).

§. 180.

β) Ueber die Bestimmung der Oberfläche bey Kugeln.

I. Die Oberfläche einer Kugel ist seinem Flächeninhalte nach so groß, wie vier größte Kugelkreise zusammengenommen.

Beweis: (Fig. 118.) Bezeichnet man die Oberfläche mit O, und den Radius der Kugel, welcher mit dem eines größten Kugelkreises einerley ist (§. 179 Zus. 4), mit r, so ist *Th)* $O = 4\, r^2 \pi$ (§. 117).

Dat.) AB und CD seyen zwey senkrechte Diameter der Kugel, und daher auch jene des größten Kugelkreises ACBD, EF sey eine Tangente dieses Kreises, durch den Punkt M, und EM = FM. Ferners denke man sich EG und FH senkrecht auf CD, und das Trapez EGHF um die Linie GH herumbewegt, so wird durch diese Bewegung ein senkrechter abgekürzter Kegel EK entstehen, dessen krumme Oberfläche jene der Kugel nur in den Punkten M und N berührt.

Nun ziehe man den Diameter MQ, die Linien MN und NQ, und denke sich EO senkrecht auf FK, so ist

$$EOF = MNQ = R \quad (\text{§. 106 Zus. 3}),\ \text{und}$$

$$EFO = EMN\ (\text{§. 29}) = NQM\ (\text{§. 107}),\ \text{folglich}$$

$$\triangle\, EOF \backsim \triangle\, MNQ\ (\text{§. 60})\ \text{und daher}$$

$$EF : MQ = EO : MN\ (\text{§. 60 Zus. 5}).$$

Nun ist EM = FM, also auch JN = KN (§. 57 Zus. 1) und MN = ½ (EJ + FK) (§. 84) = EG + FH. Setzt man EO = h, als die Höhe des abgekürzten Kegels, so ist EF : 2r = h : EG + FH, woraus

$$(EG + FH)\, EF = 2rh \ \text{oder}$$

$$\pi(EG + FH)\, EF = 2r\pi h;$$

d. h. die krumme Seitenfläche des Kegels EK ist einem Parallelogramme gleich, welches dieselbe Höhe und die Peripherie des größten Kugelkreises zur Grundlinie hat (§. 173 Zus. 3). Je kleiner hier h wird, desto kleiner wird der abgekürzte Kegel, und die Seiten desselben fallen immer mehr mit der Peripherie des größten Kugelkreises aufeinander, weßhalb auch die krumme Oberfläche eines unendlich kleinen abgeschnittenen Kegels mit der einer unendlich kleinen Zone zusammen fällt, nehmlich dieselben sind einander gleich. Es ist demnach auch die Oberfläche einer unendlich kleinen Zone, einem Parallelogramme von unendlich kleiner Höhe gleich, welches die Peripherie des größten Kugelkreises zur Grundlinie hat. Denkt man sich nun die Halbkugel ACB durch unendlich viele Parallelkreise in unendlich viele Zonen von unendlich kleinen Höhen zerlegt, so ist die krumme Oberfläche einer jeden dieser Zonen einem Parallegramme von derselben Höhe gleich, das die Peripherie des größteu Kugelkreises zur Grundline hat. Bezeichnet man die Höhen der Zonen der Ordnung nach mit a, b, c, d.... so ist

die krumme Oberfläche der ersten Zone $= 2r\pi a$
" " " " " zweyten " $= 2r\pi b$
" " " " " dritten " $= 2r\pi c$
" " " " " vierten " $= 2r\pi d$
. . . .
und man erhält die ganze krumme Oberfläche der Halbkugel ACB $= 2r\pi(a + b + c + d + \ldots)$. Nun ist bey der Halbkugel $a + b + c + d + \ldots = CP = r$, also ist die krumme Oberfläche der Halbkugel $= 2r^2\pi$, und folglich die der ganzen Kugel, nehmlich

$$O = 4r^2\pi$$ (§. 179 Zus. 5).

Zusätze:

1) Die Oberflächen zweyer oder mehrerer Kugeln verhalten sich zu einander, wie die Quadrate ihrer Radien; denn $O : o = 4R^2\pi : 4r^2\pi = R^2 : r^2$.

2) Die Oberflächen zweyer oder mehrerer Kugeln sind sich gleich, wenn die Kugeln gleiche Radien haben. (Zus. 1.)

3) Die Oberfläche einer Kugel verhält sich zu der eines senkrechten Cylinders, wenn letzterer den größten Kugelkreis der ersteren zur Grundfläche und den Diameter derselben zur Höhe hat, ebenso wie 2 : 3; denn (Fig. 119) ist die Oberfläche der Kugel $= 4r^2\pi$ (Lehrs.), und jene des Cylinders ABDE $= 2r\pi (r + 2r)$ (§. 160 Zus. und weil $h = 2r$ ist) $= 6r^2\pi$; folglich verhält sich die Oberfläche der Kugel zu jener des Cylinders, wie $4r^2\pi : 6r^2\pi$ oder wie 4 : 6 oder wie 2 : 3.

§. 181.

II. Die krumme Oberfläche einer jeden Zone ist einem Parallelogramme gleich, welches dieselbe Höhe, aber die Peripherie des größten Kugelkreises der dazu gehörigen Kugel zur Grundlinie hat.

Beweis: (Fig. 95.) Bezeichnet man den Radius der Kugel mit r und die Höhe PU der Zone ABFG mit h, so erhält man

$$Th) \quad O = 2r\pi h.$$

D) Man denke sich die Zone durch unendlich viele Parallelkreise in unendlich viele kleine Zonen zertheilt, so ist jede derselben einem Parallelogramme von unendlich kleiner Höhe gleich, welches die Peripherie des größten Kugelkreises zur Grundlinie hat (§. 180).

Bezeichnet man nun die Höhen dieser kleinen Zonen mit a, b, c, d..., so ist

die krumme Oberfläche der 1ten Zone $= 2r\pi a$
" " " " " 2ten " $= 2r\pi b$
" " " " " 3ten " $= 2r\pi c$
" " " " " 4ten " $= 2r\pi d$
. . . .　　　　. . . . . .

und folglich die krumme Oberfläche der ganzen Zone

$$ABFG = 2r\pi\,(a + b + c + d + \ldots\ldots).$$

Da endlich $a + b + c + d + \ldots\ldots = h$ ist, so ist

$$O = 2r\pi h.$$

Zusätze:

1) In einer Kugel oder in congruenten Kugeln sind die krummen Oberflächen bey gleichen Zonen stets einander gleich (Lehrs. und §. 178 Zus. 2).

2) Die krummen Oberflächen der Zonen von verschiedenen Höhen verhalten sich in einer Kugel oder in congruenten Kugeln ebenso wie diese Höhen; denn $O : o = 2r\pi H : 2r\pi h = H : h$ (Lehrs. und §. 178 Zus. 2).

3) Die krumme Oberfläche eines Kugelabschnittes ist einem Parallelogramme gleich, welches dieselbe Höhe wie der Kugelabschnitt, aber zur Grundlinie die Peripherie des größten Kugelkreises hat; denn man darf

nur in $2r\pi h$, $h = DP$ (Fig. 95) setzen, so ist die krumme Oberfläche des Abschnittes

$$ADB = 2r\pi \times DP.$$

4) Die ganze Oberfläche eines Kugelabschnittes ist einem Parallelogramme von derselben Höhe gleich, das die Peripherie desjenigen Kreises zur Grundlinie hat, von welchem der Diameter die Differenz zwischen dem doppelten Diameter der Kugel und der Höhe des Abschnittes ist; d. h. $O = (2d - h)\pi . h$, wenn d den Diameter der Kugel und h die Höhe des Abschnittes bezeichnet; dann (Fig. 95) ist

$$O = d\pi h + AP^2\pi \text{ (Zus. 3 und §. 117)},$$

$$AP^2 = AC^2 - CP^2 \text{ (§. 119 Zus. 3)} =$$

$$\tfrac{1}{4}d^2 - \tfrac{1}{4}d^2 + dh - h^2 = dh - h^2 = (d-h)\,h,$$

woraus $O = d\pi h + (d - h)\,\pi h = (2d - h)\,\pi . h$ folgt.

5) Die ganze Oberfläche eines Kugelausschnittes ist der Oberfläche eines Kegels gleich, welcher zu seiner Grundfläche die krumme Oberfläche des dazu gehörigen Kugelabschnittes und zu seiner Höhe und seinen Seiten den Radius der Kugel hat (§. 177), nehmlich (Fig. 95)

$$O = 2r\pi h + \frac{2AP\pi \times AC}{2} \text{ (§. 173).}$$ Nun ist

$$AP = \sqrt{h\,(2r - h)} \text{ und } AC = r, \text{ folglich}$$

$$O = 2r\pi h + r\pi \sqrt{h\,(2r-h)} =$$

$$r\pi\,[2h + \sqrt{h\,(2r - h)}] =$$

$$2r\pi\,[h + \tfrac{1}{2}\sqrt{h\,(2r-h)}].$$

Es ist demnach die ganze Oberfläche eines Kugelausschnittes auch einem Parallelogramme gleich, das zur Grundlinie die Peripherie des größten Kugelkreises, und zur Höhe $[h + \frac{1}{2}\sqrt{h\,(2r - h)}]$ hat.

§. 182.

III. Die Oberfläche des um eine Kugel beschriebenen gleichseitig senkrechten Cylinders ist gerade noch einmal so groß, als diejenige von dem in der Kugel beschriebenen.

Beweis: (Fig. 119.)

Th) S = 2s, wenn S und s die Inhalte der Oberflächen bezeichnen.

D) AB = BE = DE = AD und
GH = HL = KL = GK.

Man denke sich durch den Diameter DE der einen Grundfläche eine Ebene senkrecht auf die andere, so bildet diese Durchschnittsebene bey der Kugel einen größten Kugelkreis (§. 179 Zus. 3), und bey jedem der zwey Cylinder ein Quadrat, von welchen eines um und das andere in den größten Kugelkreis eingezeichnet ist. Nun ist AE ∽ GL (§. 91 Zus. 4), folglich

$$AE : GL = AB^2 : GH^2 \text{ (§. 81) oder}$$
$$2 : 1 = AB^2 : GH^2 \text{ (§. 121), woraus}$$
$$GH^2 = \frac{AB^2}{2} \text{ und } GH = \frac{AB}{\sqrt{2}} \text{ ist.}$$

Ferners ist

$$S = AB\pi \left(\frac{AB}{2} + AB\right) \text{(§. 160 Zus.)} = \tfrac{3}{2} AB^2\pi.$$

Und $s = GH\pi \left(\frac{GH}{2} + GH\right)$ (§. 160 Zus.) =

$\frac{3}{2} GH^2\pi = \frac{3}{4} AB^2\pi$. Man erhält demnach durch Vergleichung dieser beyden Oberflächen

$S : s = \frac{3}{2} AB^2\pi : \frac{3}{4} AB^2\pi = \frac{1}{2} : \frac{1}{4}$, woraus S = 2s folgt.

Zusatz. Die Oberfläche eines senkrecht gleichseitigen Cylinders, welcher um eine Kugel beschrieben ist, dann die Oberfläche dieser Kugel selbst, und jene eines senkrecht gleichseitigen Cylinders innerhalb der Kugel verhalten sich

zu einander wie 3 : 4 : 6; denn $s = \frac{1}{2} S$ (Lehrs.) und $K = \frac{2}{3} S$ (§. 180 Zus. 3), und man erhält durch Vergleichung der genannten Körper

$$s : K : S = \tfrac{1}{2} : \tfrac{2}{3} : 1 = 3 : 4 : 6.$$

§. 183.

IV. Die Oberfläche des um eine Kugel beschriebenen gleichseitigen Kegels ist gerade viermal so groß, als diejenige von dem in der Kugel beschriebenen.

Beweis: (Fig. 120.)

Th) $S = 4s$, wenn S und s die Inhalte der Oberflächen bezeichnen.

D) $EF = DE = DF$ und $BC = AB = AC$.

Man denke sich die 3 Körper mit einer senkrechten Ebene durch den Diameter EF geschnitten, so bildet die Durchschnittsebene bey der Kugel einen größten Kugelkreis (§. 179 Zus. 3), und bey jedem der zwey Kegel ein gleichseitiges Dreyeck, von welchen eines um, und das andere in den größten Kugelkreis eingezeichnet ist. Da nun

$\triangle DEF \backsim \triangle ABC$ (§. 91 Zus. 4), so ist

$\triangle DEF : \triangle ABC = EF^2 : BC^2$ (§. 66), oder

$4 : 1 = EF^2 : BC^2$ (§. 121 Zus.) oder

$2 : 1 = EF : BC$, woraus $BC = \frac{1}{2} EF$ ist.

Ebenso ist auch $AG = \frac{1}{2} DH$. Ferners ist

$$S = \frac{EF\pi}{2}\left(\frac{EF}{2} + \sqrt{DH^2 + \frac{EF^2}{4}}\right) \text{ (§. 173 Zus. 2)} =$$

$$\frac{EF\pi}{4}\left(EF + \sqrt{4DH^2 + EF^2}\right), \text{ und}$$

$$s = \frac{BC\pi}{2}\left(\frac{BC}{2} + \sqrt{AG^2 + \frac{BC^2}{4}}\right) \text{ (§. 173 Zus. 2)} =$$

$$\frac{EF\pi}{4}\left(\frac{EF}{4} + \sqrt{\frac{DH^2}{4} + \frac{EF^2}{16}}\right) =$$

$$\frac{EF\pi}{16}\left(EF + \sqrt{4DH^2 + EF^2}\right). \text{ Folglich}$$

$$S : s = \frac{EF\pi}{4}\left(EF + \sqrt{4DH^2 + EF^2}\right) :$$

$$\frac{EF\pi}{16}\left(EF + \sqrt{4DH^2 + EF^2}\right) \text{ oder}$$

$S : s = \frac{1}{4} : \frac{1}{16}$, woraus $S = 4s$ folgt.

Zusatz: Die Oberfläche eines gleichseitigen Kegels, welcher um eine Kugel beschrieben ist, dann die Oberfläche dieser Kugel selbst, und jene eines gleichseitigen Kegels innerhalb der Kugel verhalten sich zu einander wie 9 : 16 : 36, nehmlich wie die Quadratzahlen von 3 : 4 : 6 *) denn

$DH^2 = EF^2 - \frac{1}{4}EF^2 = \frac{3}{4}EF^2$, folglich

$s = \frac{3}{16}EF^2\pi$ und $S = \frac{3}{4}EF^2\pi$ (verm. Beweis des Lehrsatzes).

Fernes ist

$HM^2 = EM^2 - EH^2 = 4HM^2 - \frac{1}{4}EF^2$, (weil $EM = 2HM$ vermöge §. 57 Zus. 1 und 121 Zus.), also $HM^2 = \frac{1}{12}EF^2$, und $4HM^2\pi$ oder die Oberfläche der Kugel (§. 180) $= \frac{1}{3}EF^2\pi$. Man erhält demnach durch Vergleichung dieser 3 Körper die Proportion

$$s : K : S = \tfrac{3}{16}FF^2\pi : \tfrac{1}{3}EF^2\pi : \tfrac{3}{4}EF^2\pi$$

$$= \tfrac{3}{16} : \tfrac{1}{3} : \tfrac{3}{4} = 9 : 16 : 36.$$

§. 184.

γ) **Ueber die Bestimmung der körperlichen Inhalte der Kugeln und ihrer Theile, so wie die Vergleichungen derselben.**

I. Der körperliche Inhalt einer jeden Kugel ist dem dritten Theile des Produktes aus der Oberfläche mit ihrem Radius gleich.

Beweis: *Th) Kugl* $= \frac{O \times r}{3} = \frac{4}{3}r^3\pi$ (§. 180).

---

*) Man vergleiche §. 182 Zus.

D) Man denke sich die Oberfläche der Kugel in eine unendliche Menge unendlich kleine Dreyecke zertheilt, so daß dieselben als eben betrachtet werden können, und stelle sich dieselben als Grundflächen von lauter Pyramiden vor, welche ihre Spitzen im Mittelpunkte der Kugel vereinigen, so wird hierdurch die Kugel in eine unendliche Menge von Pyramiden von gleicher Höhe zertheilt, welche zusammen genommen die ganze Kugel bilden. Nun sind alle diese Pyramiden einer einzigen gleich, welche den Radius der Kugel zur Höhe, und die Summe der Grundflächen aller Pyramiden, nehmlich die Oberfläche der Kugel, zur Grundfläche hat (§. 169 Zus. 6). Folglich $Kugl = \frac{O \times r}{3}$, und da $O = 4r^2\pi$ (§. 180), so ist $Kugl = \frac{4}{3}r^3\pi$.

Zusätze:

1) Weil $d = 2r$, so ist, durch den Diameter ausgedrückt, $Kugl = \frac{1}{6}d^3\pi$.

2) Jeder Kugelausschnitt ist einem Kegel oder einer Pyramide gleich, wovon die krumme Oberfläche an der Kugel die Grundfläche und der Radius der Kugel die Höhe ist (§. 177), nehmlich
$Sect. = \frac{2r\pi h \times r}{3}$ (§. 174 Zus. 16 und §. 181 Zus. 3) $= \frac{2}{3}r^2\pi h$, wenn h die Höhe des dazu gehörigen Abschnittes ist.

3) Ein Kegel, eine Kugel und ein Cylinder, wovon ersterer und letzterer den größten Kreis der Kugel zur Grundfläche und den Diameter der Kugel zur Höhe haben, verhalten sich ihrer körperlichen Inhalte nach ebenso zu einander, wie 1 : 2 : 3; denn
$Kegl = \frac{1}{3}r^2\pi \times 2r = \frac{2}{3}r^3\pi$ (§. 174 Zus. 16),

Kugl $= \frac{4}{3} r^3 \pi$ (Lehrs.) und *Cyl* $= r^2 \pi \times 2r = 2r^3 \pi$ (§. 161 Zus. 9); folglich

$$Kegl : Kugl : Cyl = \frac{2}{3} r^3 \pi : \frac{4}{3} r^3 \pi : 2r^3 \pi = 2 : 4 : 6 = 1 : 2 : 3.$$

§. 185.

II. Der körperliche Inhalt eines Kugelabschnittes ist dem eines Cylinders gleich, welcher die Höhe des Abschnittes zum Radius seiner Grundfläche, und den Unterschied zwischen dem Radius der Kugel und dem dritten Theile der Höhe des Abschnittes zu seiner Höhe hat.

Beweis: (Fig. 95.) Bezeichnet man den Radius der Kugel CD mit r und die Höhe DP des Abschnittes ADB mit h, so ist demnach

Th) *Segmt.* ADB $= h^2 \pi (r - \frac{1}{3} h)$ (§. 161 Zus. 9).

D) Man betrachte das *Segmt.* ADB als den Unterschied zwischen dem *Sect.* ADBC und dem Kegel ABC, so ist *Segmt.* ADB $= \frac{2}{3} r^2 h \pi - \frac{1}{3} AP^2 \pi \times CP$ (§. 184 Zus. 2 und §. 174 Zus. 16).

Nun ist $CP = r - h$ und

$$AP^2 = r^2 - (r - h)^2 = h (2r - h) \text{ folglich}$$

$$\begin{aligned} Segmt.\ ADB &= \tfrac{2}{3} r^2 h \pi - \tfrac{1}{3} h (2r - h) \pi (r - h) \\ &= \tfrac{2}{3} r^2 h \pi - \tfrac{2}{3} r^2 h \pi + r h^2 \pi - \tfrac{1}{3} h^3 \pi \\ &= r h^2 \pi - \tfrac{1}{3} h^3 \pi \\ &= h^2 \pi (r - \tfrac{1}{3} h). \end{aligned}$$

Zusatz: Der Inhalt einer körperlichen Zone ist dem Unterschiede zweyer Kugelabschnitte gleich, deren Grundflächen diejenigen der Zone sind; denn Fig. 95 ist

Zone ABFG = *Segmt.* FDG — *Segmt.* ADB.

Bezeichnet man die Höhe des größeren Abschnittes mit H und jene des kleinern mit h, so ist

$$Zone = H^2\pi\,(r - \tfrac{1}{3}H) - h^2\pi\,(r - \tfrac{1}{3}h)\ (\text{Lehrs.}),$$
$$= \pi[r\,(H^2 - h^2) - \tfrac{1}{3}(H^3 - h^3)]$$
$$= \pi[r\,(H + h)\,(H - h) - \tfrac{1}{3}(H^3 - h^3)].$$

§. 186.

III. Jede Kugel ist einem Würfel oder Hexaëdron gleich, dessen Kante ein Produkt aus dem Radius der Kugel mit $\sqrt[3]{(\frac{4}{3}\pi)}$ ist.

Beweis: *Th)* $\frac{4}{3}r^3\pi = [r\sqrt[3]{(\frac{4}{3}\pi)}]^3$. (§. 184 und §. 156 Zus. 2).

Betrachtet man $\frac{4}{3}r^3\pi$ als den Inhalt eines Hexaëdrons, so ist die Seite dieses

$$\sqrt[3]{(\tfrac{4}{3}r^3\pi)} = r\sqrt[3]{(\tfrac{4}{3}\pi)}\ (\text{§. 156 Zus. 2}).$$

Mithin ist

$$\tfrac{4}{3}r^3\pi = [r\sqrt[3]{(\tfrac{4}{3}\pi)}]^3.$$

Zusatz:

Jeder Körper ist einem Hexaëdron gleich, dessen Kante die Kubikwurzel aus dem Kubikinhalte des gegebenen Körpers ist. (§. 156 Zus. 2.)

§. 187.

IV. Alle Kugeln verhalten sich ihrer Kubikinhalte nach ebenso zu einander, wie die Kubuse ihrer Radien oder Durchmesser.

Beweis: Bezeichnet man den Inhalt der größeren Kugel mit K und den der kleinern Kugel mit k, so ist

Th) $K : k = R^3 : r^3 = D^3 : d^3$.

D) Nach §. 139 Zus. 1 ist

$$\left.\begin{aligned} K : k &= \tfrac{4}{3}R^3\pi : \tfrac{4}{3}r^3\pi \text{ oder} \\ &= \tfrac{1}{6}D^3\pi : \tfrac{1}{6}d^3\pi \end{aligned}\right\} \text{(§. 184) woraus}$$

$K : k = R^3 : r^3 = D^3 : d^3$ folgt.

II. Abtheilung.

Die
angewandte
Elementar-Geometrie.

Von
der Anwendung der Geometrie im Allgemeinen.

---

§. 188.

Erklärungen.

Die angewandte Geometrie unterrichtet in der Anwendung der, in der Theorie vorkommenden Sätze. Diese Anwendung ist ausserordentlich vielfältig; jedoch werden in diese Abtheilung nur zwey Arten derselben gerechnet: in wie fern nehmlich die Geometrie im Allgemeinen Begriffe darzustellen, zu construiren, und der ursprünglichen Bedeutung des Wortes Geometrie (γεομετρία, Erdmessen) nach die Erdoberfläche aufzunehmen lehrt. Alle übrigen Anwendungen der Geometrie bilden die technischen Theile der Mathematik, und gehören nicht mehr in den Bereich eines Lehrbuches der Elementar-Mathematik; denn z. B. die Anwendung der Geometrie auf die Construktion und Aufnahme von Maschinen gehört in die Mechanik, jene von Geschützen, Projectilen, pyrotechnischen Instrumenten etc. in die Artillerie-Wissenschaft, so wie diejenige eines Gewölbes, Stiegenhauses, Dachstuhles etc. in die Architektur

u. s. w. Gegenwärtige Abtheilung zerfällt daher in zwey Hauptstücke, nehmlich:

1) in die darstellende oder construirende Elementar-Geometrie (Géometrie déscriptive élémentaire), und

2) in die Aufnahme der Erdoberfläche (des Terrains) oder in die geometrische Terrainaufnahme.

I. Hauptstück.

Die darstellende Elementar-Geometrie.

I. Abschnitt.

Die darstellende Geometrie im Allgemeinen.

§. 189.

a) Erklärungen.

Unter allen existirenden Wissenschaften ist die Mathematik die Einzige, welche das Eigenthümliche besitzt, gegebene Begriffe anschaulich darstellen zu können. — Diese Anschaulichmachung geschieht in der Geometrie entweder durch die richtige Anwendung der, in der Theorie gegebenen Lehren an und für sich, oder durch die Verbindung derselben mit der Algebra.

Die Darstellung oder Construktion stetiger Größen kann demnach auf eine zweyfache Weise geschehen, entweder

1) durch die Anwendung der geometrischen Sätze an und für sich, oder

2) durch die Anwendung dieser Sätze in Verbindung mit der Algebra.

Beydes wird in den nächsten zwey Abschnitten abgesondert vorgetragen.

§. 190.

b) Erfordernisse zur Darstellung geometrischer Größen.

Die Darstellung der Geometrie geschieht durch die Anschaulichmachung ihrer Größen, nehmlich durch Linien, Flächen und Körper. Diese Größen auf einer Ebene darzustellen oder zu construiren ist die Hauptaufgabe. Da nun selbe aber in Ermanglung theoretischer Ausbildung, und der dazu nöthigen Instrumente, welch' letztere in Zirkel und Lineal bestehen, nicht gelöset werden kann, so sind eine hinlängliche theoretische Kenntniß in der Geometrie und Algebra, so wie der Besitz genannter Instrumente die Erfordernisse zur Darstellung geometrischer Größen. Was jedoch insbesondere die Darstellung geometrischer Körper, der Räume mit drey Dimensionen, auf einer Ebene — oder wie sich Monge ausdrückt *), auf einem Zeichnungsblatte, das nur zwey Dimensionen hat — betrifft, so gehört dieselbe nicht mehr in den Bereich dieses Lehrbuches **).

§. 191.

Bey der Darstellung geometrischer Größen müssen die gegebenen und gesuchten Größen als wirklich im Raume einer Ebene befindlich, diejenigen Größen aber, welche man nur als Mittel zur Auflösung einer Aufgabe benützt, als

---

*) Welcher die Géométrie déscriptive nur auf die Geometrie mit drey Dimensionen beschränkt.

**) Man sehe über diesen Gegenstand G. Monge Géométrie déscriptive. Cinquiéme édition, augmentée d'une théorie des ombres et de la perspective, extraite des papiers de l'auteur par M. Brisson. 1827. Oder Guido Schreibers Lehrbuch der darstellenden Geometrie nach Monge Géométrie déscriptive vollständig bearbeitet in zwey Lieferungen. 1828 und 1829.

nicht vorhanden angesehen werden. Man nennt erstere die Projektionsgrößen, letztere die Construktionsgrößen, und unterscheidet sie bey ihrer Darstellung dadurch, daß man diese nur punktirt oder strichelt, jene aber vollkommen auszieht.

II. Abschnitt.

Die Darstellung der Geometrie durch Anwendung der geometrischen Sätze an und für sich.

§. 192.

a) Erklärungen.

So wie eine jede Anwendung theoretischer Sätze überhaupt nur durch eine Reihe von Aufgaben gezeigt werden kann, ebenso ist selbes auch in der Anwendung der Elementar-Geometrie um so mehr der Fall, indem hier die Aufgaben von so verschiedener Art seyn können, daß sich über deren Lösung eben so wenig, wie bey den algebraischen Aufgaben, allgemeine Regeln angeben lassen. Nur auf diesem Wege ist es möglich dahin zu gelangen, durch die Anwendung der jedesmal passenden Hülfslinien, welches oft das einzige Hülfsmittel ist, die richtige Darstellung geometrischer Größen auf dem kürzesten Wege zu erhalten.

§. 193.

b) Postulate.

Aus den, in der reinen Geometrie gegebenen Sätzen ergeben sich für die darstellende Geometrie folgende Postulate:

1) Man kann zwischen zwey gegebenen Punkten jedes-

mal eine gerade Linie ziehen, oder sich als gezogen denken. (§. 14 Grundſ. 1.)

2) Man kann in einem jeden Punkte einer geraden Linie oder Ebene auf jede der beyden letztern eine Senkrechte errichten. (§. 14 Zuſ. 4 u. §. 126.)

3) Man kann von einem jeden Punkte außerhalb einer geraden Linie oder Ebene auf jede der letztern beyden eine Senkrechte fällen. (§. 14. Zuſ. 5 u. §. 126.)

4) Man kann durch einen jeden Punkt außerhalb einer Linie zu letzterer eine Parallele ziehen. (§. 29. Zuſ. 7.)

5) Durch drey gegebene Punkte, welche nicht in einer geraden Linie liegen, läßt sich jederzeit eine Ebene legen, oder sich als gelegt denken. (§. 39 Grundſ.)

6) Aus jedem beliebigen Punkte läßt sich mit jedem beliebigen Radius ein Kreis beschrieben. (§. 102.)

Zuſätze:

1) Man kann zwischen zwey gegebenen Punkten jedesmal nur eine gerade, wohl aber unendlich viele krumme und gemischte Linien ziehen. (Poſt. 1 und §. 14 Grundſ. 1 u. 2.)

2) Man kann in einem jeden Punkte einer geraden Linie oder Ebene auf jede der letztern beyden nur eine Senkrechte errichten. (Poſt 2, §. 14. Zuſ. 4 und §. 126 Zuſ. 5).

3) Man kann aus einem jeden Punkte außerhalb einer geraden Linie oder einer Ebene auf jede der letztern beyden nur eine senkrechte fällen. (Poſt. 3, §. 14 Zuſ. 5 u. §. 126 Zuſ. 3.)

4) Man kann durch einen jeden Punkt außerhalb einer Linie zu letzterer nur eine Parallele ziehen. (Poſt. 4 und §. 29 Zuſ. 7.)

5) Man kann durch 3 Punkte, welche nicht in einer geraden Linie liegen, jedesmal nur eine Ebene legen (Post 5, §. 39 Grundſ.)

6) Man kann aus einem jeden beliebigen Punkte mit jedem beliebigen Radius in einer und derselben Ebene nur einen Kreis beschreiben. (Post. 6 u. §. 102.)

§. 194.

c) Aufgaben.

I. Einen gegebenen geradlinigen Winkel durch einen andern darzustellen, welcher ersterem vollkommen gleich ist.

Auflösung und Beweis: (Fig. 21.) Der gegebene Winkel sey α. Man ziehe eine gerade Linie DF, beschreibe aus den Scheiteln A und D mit einem beliebigen Radius AJ = DL die Kreisbögen JK und LM, trage die Größe des Bogens JK = LM auf, und ziehe endlich durch D und M eine gerade Linie, so ist β der verlangte Winkel; denn die Größe eines Winkels ist durch die Größe desjenigen Kreisbogens bestimmt, welchen man zwischen den Schenkeln zieht (§. 20.) Da hier diese Bögen bey congruenten Kreisen (§. 102 Zus. 4) einander gleich gemacht wurden, so sind auch die dazu gehörigen Winkel gleich. (§. 23 Zus. 2.)

§. 195.

II. Einen gegebenen geradlinigen Winkel zu halbiren.

Auflösung und Beweis: (Fig. 122.) Man schneide an den Schenkeln des gegebenen Winkels ABC gleiche Stücke BD und BE ab, beschreibe aus D und E mit einem beliebigen Radius EF zwey sich kreuzende Kreisbögen, und verbinde den Durchschnittspunkt derselben mit dem Scheitel des gegebenen Winkels durch eine gerade Linie BF, so halbirt diese Linie den gegebenen Winkel, d. h.

$$Th)\quad m = n = \tfrac{1}{2}\,ABC$$

D) BE = BD (verm. Constr.)
EF = DF (§. 102 Zus. 1).
BF = BF

also △ BEF ≌ △ BDF (§. 50) und
m = n = ½ ABC.

Zusatz: (Fig. 8.) Um eine gegebene gerade Linie AB zu halbiren beschreibe man mit den Radius AE = BE zwey, sich durchschneidende Kreisbögen, und halbire den Winkel AEB durch EF (Aufg.), so halbirt letztere Linie auch die gegebene; denn im Dreyecke AEB ist vermöge Construction AE = BE und AEC = BEC, also auch AC = BC (§. 56 Zus. 4).

§. 196.

III. In einem gegebenen Punkte einer geraden Linie auf letztere eine Senkrechte zu errichten.

Auflösung und Beweis: (Fig. 10.) Wenn C der gegebene Punkt in der Linie AB ist, so schneide man auf letzterer zwey Stücke CD = CE ab, beschreibe aus den Punkten D und E mit einem und demselben Radius DF zwey Kreisbögen, welche sich im Punkte F schneiden und ziehe CF, so ist diese Linie senkrecht auf der gegebenen, also

Th) ACF = BCF = R

D) CD = CE }
DF = EF } verm. Constr.
CF = CF

also △ DCF ≌ △ ECF (§. 50)
und ACF = BCF = R (§. 49 Zus. 2 u. §. 23 Zus. 1).

Zusätze:

1) (Fig. 123.) Ist der gegebene Punkt C außerhalb der

geraden Linie AB, und soll von ersterem aus auf letztere eine Senkrechte gefällt werden, so beschreibe man aus C einen Kreisbogen, welcher AB in D u. E schneidet, und halbire den Winkel DCE durch CF (§. 195), so ist CF die verlangte Senkrechte. (§. 56 Zus. 4.)

2) (Fig. 42.) Um am Endpunkte B einer geraden Linie BC auf letztere eine Senkrechte zu errichten, wähle man zwischen B und C oberhalb nicht zu weit von der Linie entfernt einen Punkt E, beschreibe mit BE einen Bogen, welcher etwas größer als ein Halbkreis ist, so, daß er BC in F schneidet, ziehe dann durch E und F den Diameter FG und zuletzt die Linie GB, so ist letztere die verlangte Senkrechte. (§. 106 Zus. 3.)

§. 197.

IV. Man soll durch einen gegebenen Punkt außerhalb einer geraden Linie zu letzterer eine Parallele ziehen.

Auflösung und Beweis: (Fig. 14.) Es sey CD die gerade Linie und G. der gegebene Punkt, so läßt sich diese Aufgabe auf mehrerley Arten auflösen; jedoch sind die folgenden zwey Arten diejenigen, durch welche die Parallelen am genauesten erhalten werden.

1) Man fälle von G aus auf CD die Senkrechte GH (§. 196 Zus. 1), errichte in einem beliebigen Punkte J von CD auf diese eine Senkrechte JK (§. 196), schneide auf derselben AJ = GH ab, und ziehe endlich durch A und G die Linie AB, so ist AB ⌗ CD; denn AB hat in allen Punkten gleiche Abstände von CD (§. 27 u. §. 14 Anmerk.)

2) Man ziehe durch G eine beliebige gerade Linie EF, welche CD. schneidet, trage den Winkel o in G auf der an-

dern Seite von EF auf (§. 194), so, daß z = o wird, und verlängere den Schenkel AG, so ist

AB ⌗ CD (§. 29 Zus. 1).

Anmerk. Man bedient sich bey großen Linien mit größerer Genauigkeit der ersteren Art.

§. 198.

V. Aus drey gegebenen geraden Linien, wovon immer zwey zusammen größer seyn müssen, als die dritte (§. 53), ein Dreyeck darzustellen.

Auflösung und Beweis: (Fig. 124.) Die gegebenen Linien seyen a, b und c. Man nehme eine derselben, z. B. c = AB als Grundlinie an, betrachte die beyden anderen Seiten b = AC und a = BC als Radien, und beschreibe damit zwey Kreisbögen, so werden sich selbe schneiden, weil a + b > c (§. 53); und es wird ACB das verlangte Dreyeck seyn, denn AB = c, AC = b und BC = a vermöge Construktion.

Zusätze:

1) Um ein gleichseitiges Dreyeck zu construiren ist nur eine Seite zu wissen nothwendig (§. 44). Man darf dann nur die gegebene Seite als Radius für die beyden Kreisbögen nehmen, und übrigens wie oben verfahren.

2) Um aus zwey gegebenen Seiten, wovon eine die Schenkeln und die andere die Grundlinie angibt, ein gleichschenkliges Dreyeck darzustellen, nehme man erstere als den Radius für die beyden Kreisbögen, und letztere als die Grundlinie des Dreyecks an.

§. 199.

VI. Aus zwey Seiten und einem Winkel ein Dreyeck darzustellen.

Auflösung und Beweis: (Fig. 125.) Es seyen a, b und α die gegebenen Stücke. Soll nun α von a und b eingeschlossen seyn, so trage man vom Scheitel aus auf jeden der Schenkeln von α eine der gegebenen Seiten auf, so daß z. B. AB = a und AC = b wird, und verbinde die Endpunkte B und C durch eine gerade Linie BC, so ist ABC das verlangte Dreyeck (§. 49 Zus. 6). Soll aber α der Seite b gegenüberstehen, vorausgesetzt daß b > a (§. 49 Zus. 6), so liegt α an der Seite a an. Man trage daher a = AB auf, verlängere den andern Schenkel beliebig, nehme die Größe b mit dem Zirkel, und beschreibe mit diesem Radius aus B einen Kreisbogen, welcher AC in C schneiden wird, so ist AC = b die, dem Winkel α gegenüberstehende Seite, und ABC das verlangte Dreyeck. (§. 49 Zus. 6.)

§. 200.

VII. Aus einer Seite und zwey Winkeln ein Dreyeck darzustellen.

Auflösung und Beweis: (Fig. 126.) Soll a die, von α und β eingeschlossene Seite seyn, so trage man an den Endpunkten von a = AB die Winkel α = CAB und β = ABC auf (§. 194), und verlängere die anderen Schenkeln dieser Winkel, bis sie sich in C schneiden, so ist ABC das verlangte Dreyeck. (§. 51 Zus. 1.)

Ist aber z. B. AC = a, und nur einer der gegebenen Winkel z. B. α an dieser Linie anliegend, so trage man α = CAB an einem Endpunkte der gegebenen Seite auf (§. 194), verlängere hierauf den andern Schenkel, construire an einen beliebigen Punkt D dieses Schenkels den anderen Winkel β = ADE (§. 194) und ziehe endlich durch den anderen Endpunkt C der gegebenen Seite eine Parallele BC zu DE (§. 197), so ist ABC = ADE = β (§. 29) und mithin ABC das verlangte Dreyeck. (§. 51 Zus. 1.)

§. 201.

VIII. Ein Dreyeck darzustellen, das mit einem gegebenen congruent ist.

Die Auflösung geschieht eben so wie §. 198, und der Beweis hierfür beruht auf §. 50 Zus. 1.

Zusatz: Um ein Vieleck nachzuzeichnen zerlege man dasselbe durch Diagonalen, welche sich nicht schneiden, in Dreyecke, und stelle durch die Construktion der einzelnen Dreyecke und deren Zusammensetzung, das Vieleck dar, welches dem gegebenen congruent ist. (§. 90 Post 2.)

§. 202.

IX. Man soll aus zwey Seiten und dem eingeschlossenen Winkel ein Parallelogramm construiren.

Auflösung und Beweis: (Fig. 43.) Es seyen AB und BC die zwey gegebenen Seiten und B sey der von ihnen eingeschlossene Winkel, so construire man an BC den Winkel B (§. 194), trage auf den andern Schenkel die Größe von AB vom Scheitel aus auf, beschreibe aus A mit BC und aus C mit AB Kreisbögen, und ziehe nach deren Durchschnittspunkt D die Linien AD und CD, so ist BD das verlangte Parallelogramm. (§. 75 Zus. 9.)

Zusatz: Um ein Quadrat zu beschreiben ist nur eine Seite als gegeben nothwendig (§. 75 Zus. 10). Man darf dann nur in einem Endpunkte der gegebenen Linie eine Senkrechte errichten (§. 196 Zus. 2), darauf die Größe der gegebenen Linie auftragen und in der Construktion, wie oben weiter fahren, indem man die gegebene Linie als die Radien der Kreisbögen nimmt.

§. 203.

X. Es sey ein Dreyeck in eine gegebene Anzahl gleiche Theile zu zerlegen.

Auflösung und Beweis: (Fig. 34.) Man theile eine Seite des Dreyecks in die gegebene Anzahl gleiche Theile, und ziehe von allen Theilungspunkten an den gegenüberstehenden Winkel gerade Linien, so sind die erhaltenden kleineren Dreyecke alle einander gleich. (§. 52 Zus. 1.)

Zusatz: Um ein Parallelogramm in eine gegebene Anzahl gleiche Theile zu zerlegen, theile man eine Seite in die gegebene Anzahl gleiche Theile und ziehe durch die Theilungspunkte bis zur gegenüberstehenden Seite lauter Parallellinien zu den beyden andern sich entgegenstehenden Seiten (§. 197.), so sind die erhaltenden kleineren Parallelogramme alle einander gleich. (§. 76.)

§. 204.

XI. Man soll ein gegebenes Dreyeck in ein anderes verwandeln, das einen gegebenen Winkel enthält.

Auflösung und Beweis: (Fig. 25.) Das gegebene Dreyeck sey ABC und der gegebene Winkel DAC, so ziehe man durch B eine Parallele zu AC (§. 197), trage in A den gegebenen Winkel auf (§. 194), und ziehe CD, so ist ACD das verlangte Dreyeck; denn $\triangle$ ACD $=$ $\triangle$ ABC (§. 52).

Zusatz: Um ein Parallelogramm in ein anderes zu verwandeln, das einen gegebenen Winkel enthält, trage man letzteren am Endpunkte einer Seite auf, verlängere die gegenüberstehende Seite, und verfahre übrigens wie §. 202 (§. 76).

§. 205.

XII. Man soll ein Parallelogramm in ein anderes mit einer gegebenen Seite verwandeln.

Aufl. und Bew. (Fig. 47.) BE sey das gegebene Parallelogramm und DJ die gegebene Seite für das neue

Parallelogramm, so verlängere man BH und mache AH = DJ, ziehe AE, und verlängere diese Linie bis sie die Verlängerung von BG in C schneidet. Durch A ziehe man AD ∦ BC und durch C die Linie CD ∦ AB, welche sich in D schneiden. Endlich verlängere man die Seiten GE und HE des gegebenen Parallelogrammes, so ist ED das verlangte Parallelogramm (§. 77).

Zusätze:

1) Jedes Dreyeck läßt sich in ein Parallelogramm verwandeln; denn man darf nur (Fig. 48) im △ BCD die Linie BC in F halbiren (§. 195 Zus.), und dann F eine Parallele zu CD und durch D eine solche zu BC ziehen (§. 197), welche sich in E schneiden, so

$$FD = \triangle\ BCD = \frac{BC \cdot DH}{2}\ (§.\ 67\ u.\ 82).$$

2) Um ein Dreyeck in ein Parallelogramm mit einer gegebenen Seite zu verwandeln, verwandle man es zuvor nach Zus. 1 in ein Parallelogramm, und dann dieses nach Aufgabe dieses §. in jenes mit der gegebenen Seite.

3) Um ein Parallelogramm in ein Dreyeck zu verwandeln das eine gegebene Seite hat, verwandle man es zuvor nach Aufgabe dieses §. in ein anderes, das die Hälfte der gegebenen Seite zu seiner eigenen hat, und dann dieses Parallelogramm durch das in Zus. 1 angegebene entgegengesetzte Verfahren in das verlangte Dreyeck.

§. 206.

XIII. Man soll zwey Quadrate in eines verwandeln.

Aufl. und Bew. (Fig. 127.) AC und BD seyen die gegebenen Quadrate. Man construire einen rechten Win-

kel EFG (§. 196 Zus. 2), trage die Seiten der gegebenen Quadrate auf den Schenkeln durch FJ und FH auf, und ziehe HJ, so ist HJ die Seite eines Quadrates, das der Summe von AC und BD gleich ist (§. 119).

Zusätze:

1) Sind mehrere Quadrate in eines zu verwandeln, welches allen gegebenen zusammengenommen gleich ist, so verfahre man mit den ersten zwey Quadraten auf die eben beschriebene Weise, und nehme dann die erhaltende Hypothenuse als eine Kathete und die Seite des dritten Quadrates als die andere an, so ist die neue Hypothenuse die Seite eines Quadrates, das der Summe der ersten Dreyen gleich ist u. s. w.

2) Soll ein gegebenes Quadrat in ein anderes von doppeltem Inhalte verwandelt werden, so darf man nur die Diagonale dieses gegebenen Quadrates als die Seite des gesuchten nehmen; denn (Fig. 41)

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2BC^2.$$

3) Nach dem bereits Erwähnten ist es auch leicht ein Quadrat, das der Differenz zweyer gegebenen, oder ein anderes, das der Hälfte eines gegebenen gleich ist, zu construiren.

§. 207.

XIV. Man soll durch drey gegebene Punkte, welche nicht in einer geraden Linie liegen, eine Kreislinie ziehen.

Aufl. und Bew. (Fig. 70.) Man verbinde die drey gegebenen Punkte A, B und D durch zwey gerade Linien, und halbire dieselben (§. 195. Zus.), so ist der Durchschnittspunkt dieser Halbirungslinien der Mittelpunkt der verlangten Kreislinie (§. 110. Zus. 5).

Zusätze:

1) Auf demselben Wege läßt sich um und in ein jedes reguläre Polygon ein Kreis beschreiben (§. 110. Zus. 1, 2, 3, 4 u. 5).

2) Ebenso läßt sich auch durch dieselbe Construktion um ein jedes Dreyeck ein Kreis beschreiben (§. 110. Zus. 5).

3) Soll der Mitttelpunkt eines gegebenen Kreises aufgesucht werden, so ziehe man zwey Sehnen, und verfahre übrigens wie oben.

4) Um innerhalb eines Kreises ein jedes beliebige reguläre Polygon einzuzeichnen, construire man den Centralwinkel des gegebenen Polygons (§. 94. Zus. 2), und verlängere die Schenkeln bis an die Peripherie, so ist die Sehne des abgeschnittenen Bogens die Polygonseite.

§. 208.

XV. Es soll innerhalb eines Dreyeckes eine Kreislinie beschrieben werden.

Aufl. und Bew. (Fig. 128.) Man halbire zwey Winkel, z. B. A und C (§. 195), so ist der Durchschnittspunkt D dieser Halbirungslinien der Mittelpunkt und der senkrechte Abstand des Mittelpunktes von einer Seite des Dreyeckes der Radius der verlangten Kreislinie. Es ist also

Th) $DE = DF = DG$

D) $x = y$ (verm. Constr.), $z = n = R$ und $AD = AD$, folglich $\triangle ADE \cong \triangle ADF$ (§. 51) und daher $DE = DF$ (§. 49 Zus. 1). Es ist aber auch $p = q$ (verm. Constr.), $m = o = R$ und $CD = CD$, also $\triangle CDE \cong \triangle CDG$ (§. 51) und daher $DE = DG$ (§. 49. Zus. 1). Mithin ist $DE = DF = DG$.

Zusatz: Es sind demnach die Seiten eines Dreyeckes Tangenten des innerhalb beschriebenen Kreises.

§. 209.

XVI. Man soll durch einen gegebenen Punkt an der Peripherie eines Kreises eine Tangente construiren.

Aufl. und Bew. (Fig. 58.) Man ziehe an dem gegebenen Punkt B den Radius BC und darauf EF durch B senkrecht (§. 196. Zus. 2), so ist Letztere die Tragente (§. 104. Zus.)

§. 210.

XVII. Es soll zu drey gegebenen geraden Linien die vierte geometrische Proportionallinie construirt werden.

Aufl. und Bew. (Fig. 129.) Es seyen a, b, c die gegebenen Linien und x sey die gesuchte. Man construire einen beliebigen Winkel, trage darauf CD = a, CE = b und DG = c auf, und ziehe durch G die Linie GF # DE, so erhält man CD : CE = DG : EF (§. 57. Zus. 3) oder a : b = c : x. Es ist nämlich EF die vierte geometrische Proportionallinie.

Zusatz: Soll zu zwey gegebenen geraden Linien a und b (Fig. 64) die mittlere geometrische Proportionallinie construirt werden, so trage man beyde Linien auf eine einzige AB auf, indem man AE = a und BE = b macht, halbire AB in C (§. 195. Zus.), beschreibe darüber einen Halbkreis, und errichte in E die Linie DE auf AB senkrecht. Diese Senkrechte ist die verlangte mittlere Proportionallinie; denn zieht man AD und BD, so ist x = R (§. 106. Zus. 3) und daher AE : DE : BE (§. 62. Zus. 1).

§. 211.

XVIII. Man soll aus einem gegebenen Punkte außerhalb einer Ebene auf letztere eine Senkrechte fällen.

Aufl. und Bew. (Fig. 130.) AB sey die Ebene und C der gegebene Punkt außerhalb derselben. Man ziehe in AB eine beliebige Linie DE, lege durch C, D und E eine Ebene, und fälle in derselben CF auf DE senkrecht; ferner erreicht man in F und in der Ebene AB eine Linie FG senkrecht auf DE, lege durch C, F und G eine Ebene und fälle in derselben CH senkrecht auf FG, so ist diese Senkrechte die Verlangte. Um dieses zu beweisen ziehe man durch H eine Parallele zu DE, nehmlich JK, so ist

Th) CHF = R = CHK (§. 126.)

D) Weil CH auf FG senkrecht errichtet wurde, so ist CHF = R. Nun ist auch DE senkrecht auf CF und FG (vermöge Constr.), also auch senkrecht auf der Ebene CFG (§. 126). Es ist aber ferners JK # DE (verm. Constr.), mithin ist auch CHK = R (§. 127).

§. 212.

XIX. Man soll in einem gegebenen Punkte einer Ebene auf letztere eine Senkrechte errichten.

Aufl. und Bew. (Fig. 130.) AB sey die Ebene und L der gegebene Punkt in derselben. Man nehme außerhalb der Ebene einen beliebigen Punkt C, fälle aus demselben auf erstere CH senkrecht (§. 211), lege durch C, H und L eine Ebene und ziehe in dieser LM # CH (§. 197), so ist LM die verlangte Senkrechte (§. 127).

Zusatz: Um durch eine gerade Linie in einer gegebenen Ebene auf letztere eine senkrechte Ebene zu legen, errichte man nach dem Vorhergehenden in einem beliebigen Punkte der gegebenen Linie auf die gegebene Ebene eine Senkrechte,

und lege durch diese Senkrechte und die gegebene Linie eine Ebene, so ist diese senkrecht auf der gegebenen (§. 132. Zus. 4.).

§. 213.

XX. Ein Parallelogramm darzustellen, das dem Inhalte nach einer andern beliebigen Ebene gleich ist.

Auflösung und Beweis: Man zerlege die Größe des Flächeninhaltes der zu verwandelnden Ebene in zwey Faktoren, und nehme einen derselben zur Grundlinie und den andern zur Höhe des Parallelogramms (§. 82.).

Zusätze:

1) Um eine jede beliebige Ebene in ein Quadrat zu verwandeln, ziehe man aus dem Flächeninhalte der Ebene die Quadratwurzel, so ist selbe die Seite des verlangten Quadrates (§. 122 Zus. 2).

2) Um eine jede beliebige Ebene in ein Dreyeck zu verwandeln, zerlege man die Größe des Flächeninhaltes der Ebene in zwey Faktoren, und nehme einen derselben doppelt, so ist letzterer die Größe der Grundlinie und der andere einfache jene der Höhe des Dreyecks (Aufg. und §. 120 Zus.)

III. Abschnitt.

Die Darstellung der Geometrie durch Anwendung der geometrischen Sätze in Verbindung mit der Algebra.

§. 214.

a) Erklärungen.

In wie fern die geometrischen Größen durch algebraische Ausdrücke vorgestellt werden können, lassen sich auf dieselben

auch alle algebraischen Operationen anwenden. In der Mathematik gibt es überhaupt übereinstimmende und entgegengesetzte Größen*); also auch in der Geometrie; denn betrachtet man zwey oder mehrere Linien, Ebenen oder Körper in wechselseitiger Beziehung hinsichtlich ihrer übereinstimmenden oder entgegengesetzten Lage zu einander, so erhält man auch übereinstimmende und entgegengesetzte geometrische Größen, und zwar, wenn erstere positiv sind, so sind letztere negativ, oder sind erstere negativ, so sind letztere positiv. Nennen wir z. B. diejenige Linie, welche oberhalb einer anderen auf letzterer senkrecht steht, positiv, so ist eine jede andere, welche unterhalb der nehmlichen Linie auf letzterer senkrecht steht, negativ u. s. w.

§. 215.

Betrachtet man z. B. (Fig. 20.) die Linie EG als die Erzeugung eines bewegten Punktes von E aus, und die Linie GF als die Erzeugung eines bewegten Punktes nach derselben Richtung, so sind diese geometrischen Größen übereinstimmend, und vermehren sich also, indem sie beyde zusammen die Linie EF geben, d. h. $EG + GF = EF$. Betrachtet man aber die Linie EF als die Erzeugung eines bewegten Punktes von E aus, und die Linie FG als die die Erzeugung eines bewegten Punktes nach entgegengesetzter Richtung von F aus, so sind diese geometrischen Größen sich entgegengesetzt, und vermindern sich also, indem sie beyde zusammen die Linie EG geben, d. h. $EF - FG = EG$.

§. 216.

Es ist demnach leicht, eine Größe $x = a + b$, oder eine andere $y = a - b$ zu construiren; und zwar sind x

*) Man sehe im ersten Theile die Einleitung zur Mathematik im Allgemeinen.

und y gerade Linien, wenn auch a und b solche bedeuten. Soll aber z. B. die Größe x = ab anschaulich gemacht werden, wenn a und b gerade Linien sind, so kann x entweder selbst eine gerade Linie oder auch eine Ebene seyn; denn erstens ist aus 1 : a = b : x, x = ab, d. h. x ist die vierte Proportionallinie zu 1, a und b, und zweytens ist aus §. 82 für den besondern Fall, wenn a und b zwey, aufeinander senkrecht stehende Linien sind, x ein Parallelogramm, welches a zu seiner Grundlinie und b zu seiner Höhe hat, weil ein Produkt aus der Größe zweyer senkrechten Linien den Flächeninhalt eines Parallelogrammes gibt. Im ersten Falle wird x construirt, wie §. 210, nur daß 1 als die erste Proportionallinie eine gewisse Maaseinheit seyn muß. Um im letzten Falle x zu construiren errichte man a auf b senkrecht (§. 196) und construire auf die Linie b ein Parallelogramm mit der Höhe a.

§. 217.

b) Aufgaben.

I. Man soll die algebraischen Ausdrücke 5a, $\frac{3}{4}$ a, $2\frac{1}{3}$ a geometrisch construiren, wenn a eine gerade Linie ist.

Auflösung und Beweis:

1) Man trage die Linie a fünfmal nach einer und derselben Richtung so auf, daß der Endpunkt eines jeden vorhergehenden Theiles der Anfangspunkt eines jeden Folgenden ist, so ist die Größe der erhaltenden Linie gleich 5a.

2) Man theile die Linie a in 4 gleiche Theile, und trage davon einen Theil 3mal wie unter 1tens nach einerley Richtung auf.

3) Man setze an 2a (1tens) noch $\frac{1}{3}$a (2tens) an.

Zusatz: Bedeuten die Zahlen 5, $\frac{3}{4}$ und $2\frac{1}{3}$ selbst gerade Linien nach was immer für einer Maaseinheit gemes-

sen, und ist a die auf denselben senkrecht stehende Linie, so bedeuten die gegebenen Ausdrücke 5a, $\frac{3}{7}$a und $2\frac{1}{3}$a lauter Parallelogramme (§. 216).

§. 218.

II. Es sey abc zu construiren.

Auflösung und Beweis: Betrachtet man die Proportion 1 : ab = c : x, so ist x die vierte Proportionallinie, welche man nach §. 210. findet. Der Ausdruck ab läßt sich nach §. 216 leicht construiren.

Zusatz: Bezeichnet in dem gegebenen Ausdrucke abc der Faktor ab ein Parallelogramm (§. 216), und c die Senkrechte auf demselben, so bezeichnet abc ein Parallelepipedon mit der Länge a, der Breite b und der Höhe c (§. 156).

§. 219.

III. Es soll $x = \frac{ab}{c}$ construirt werden.

Auflösung und Beweis: Aus $x = \frac{ab}{c}$ ist cx = ab, also c : a = b : x d. h. x ist die vierte Proportionallinie zu c, a und b, deren Construktion nach §. 210 geschieht.

Zusätze:

1) Soll $x = a^2$ construirt werden, so setze man $x = \frac{a^2}{1}$, woraus 1.x = a.a, und also 1 : a = a : x ist; d. h. es ist x die dritte Proportionallinie zur Maaseinheit und der Linie a. Die Construktion des gegebenen Ausdruckes geschieht ebenso wie in §. 210, indem man (Fig. 129) CE = DG = a macht.

2) Es kann aber auch $x = a^2$ ein Quadrat mit der Seite a, dessen Construktion nach §. 202. Zus. geschieht, so wie auch ein Parallelogramm mit der Grundlinie a und mit der Höhe a bedeuten, welches nach §. 202. construirt wird.

§. 220.

IV. Man construire $x = \sqrt{a}$.

Auflösung und Beweis: Aus $x = \sqrt{a}$ ist $x^2 = a$ oder $x.x = 1.a$, woraus $1 : x = x : a$ ist; d. h. x ist die mittlere Proportionallinie zwischen der Maaseinheit und a, welche man nach §. 210 Zus. findet.

Zusätze:

1) Wäre $x = \sqrt{ab}$ darzustellen, so ist $x^2 = ab$ woraus $a : x : b$; d. h. x ist die mittlere Proportionallinie zwischen a und b (§. 210 Zus.)

2) Da die Quadratwurzel aus einer Größe sowohl positiv als auch negativ seyn kann, so können auch hier die Ausdrücke für x sowohl positiv als auch negativ construirt werden, indem die mittlere Proportionallinie sowohl ober- als auch unterhalb des Diameters construirt werden kann. (§. 210 Zus.)

§. 221.

V. Man soll $x = \frac{a^2 - b^2}{c}$ construiren.

Auflösung und Beweis: Aus $x = \frac{a^2 - b^2}{c}$ ist $cx = a^2 - b^2$ oder $cx = (a + b)(a - b)$ und hieraus

$$c : (a + b) = (a - b) : x;$$

d. h. x ist die vierte Proportionallinie zu c und der Summe und Differenz zwischen a und b, deren Construktion man nach §. 210 erhält.

Zusätze:

1) Um $x = a^2 - b^2$ darzustellen, suche man nach §. 210 die vierte Proportionallinie zu der Maaseinheit und zu der Summe und Differenz zwischen a und b; denn aus $x = a^2 - b^2$ ist $1 . x = (a + b)(a - b)$, woraus $1 : (a + b) = (a - b) : x$.

2) Um $x = (a \pm b)^2$ zu construiren, suche man wie in §. 219 Zus. 1 die dritte Proportionallinie zu der Maaseinheit und der Summe oder Differenz zwischen a und b; denn aus $x = (a \pm b)^2$ ist $1 . x = (a \pm b)(a \pm b)$, woraus $1 : (a \pm b) : x$.

§. 222.

VI. Es soll $x = \sqrt{(a^2 + b^2)}$ construirt werden.

Auflösung und Beweis: Aus $x = \sqrt{(a^2 + b^2)}$ ist $x^2 = a^2 + b^2$; d. h. x ist die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreyeckes, dessen Katheten a und b sind (§. 119. Zus. 2). Man construire zu diesem Zwecke einen rechten Winkel (§. 196. Zus. 2.), trage auf den Schenkeln desselben die Größen a und b auf, und ziehe die Hypothenuse so ist letztere die Größe von x.

Zusätze:

1) Es ist demnach auch x die Seite eines Quadrates, welches der Summe der zwey Quadrate aus den beyden Linien a und b zusammengenommen gleich ist (§. 119), wofür die Construktion nach §. 206. geschieht.

2) Wäre $x = \sqrt{(a^2 - b^2)}$ zu construiren, so stelle man nach (§. 200) ein rechtwinkliges Dreyeck dar, in welchem a die Hypothenuse und b eine Kathete ist, und man erhält dann x als die andere Kathete, denn aus $x = \sqrt{(a^2 - b^2)}$ ist $x^2 = a^2 - b^2$ (§. 119 Zus. 3). Es ist aber auch für diesen Fall x die

Seite eines Quadrates, welches der Differenz zwischen zwey anderen Quadraten, wovon a und b Seiten sind, gleich ist, wofür die Cunstruktion leicht aus §. 206 Lehrs. und Zus. 3. gefunden werden kann.

3) Es ist aber aus $x = \sqrt{(a^2 - b^2)}$ auch $x^2 = a^2 - b^2$ oder $x^2 = (a + b)(a - b)$, woraus $(a + b) : x : (a - b)$ d. h. x ist die mittlere Proportionallinie zwischen der Summe und der Differenz von a und b, welche nach §. 210 Zus. construirt wird. Es ist demnach eine jede Kathete die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen der Summe und Differenz aus der Hypothenuse und der andern Kathete.

4) Soll $x = \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}$ dargestellt werden, so verfahre man nach §. 206 Zus. 1, indem man a, b und c als die Seiten dreyer Quadrate, und x als die Seite eines Quadrates betrachtet, welch letzteres den ersten dreyen zusammengenommen gleich ist; denn aus der gegebenen Gleichung ist $x^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

5) Soll $x = \sqrt{(a^2 + \frac{1}{4} b^2)}$ construirt werden, so sage man $x = \sqrt{\left[a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right]}$, und construire die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreyeckes, dessen Katheten a und $\frac{b}{2}$ sind (Aufg.). $\frac{b}{2}$ wird nach §. 217 construirt.

6) Soll $x = \sqrt{(a^2 - \frac{1}{4} b^2)} = \sqrt{\left[a^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2\right]}$ construirt werden, so geschieht selbes nach Zus. 2.

§. 223.

VII. Man soll $x = a\sqrt{2}$ construiren.

Aufl. und Bew.: Aus $x = a\sqrt{2}$ ist $x^2 = 2a^2$; d. h. x ist die Seite eines Quadrates, welches doppelt so

groß ist, als ein anderes mit der Seite a; denn $x^2 = a^2 + a^2$ (§. 119). Oder x ist die Hyponthenuse eines rechtwinkligen Dreyeckes, in welchem jede Kathete gleich a ist. Die Konstruktion hierfür geschieht nach §. 206 Zus. 2.

Zusätze:

1) Soll man $x = \sqrt{2}$ darstellen, so sage man dieser Ausdruck ist einerley mit $x^2 = 2$ oder $x^2 = 1 . 2$, woraus

$$1 : x : 2$$

d. h. man suche zu 1 und 2 mit einerley Maas gemessen die mittlere Proportionallinie (§. 210 Zus.).

2) Wäre $x = \sqrt{3}$ zu construiren, so suche man nach §. 210 Zus. die mittlere Proportionallinie zwischen 1 und 3 mit einerley Maaseinheit gemessen; denn der gegebene Ausdruck ist einerley mit $x^2 = 3$, woraus

$$1 : x : 3.$$

3) Um $x = 3a \sqrt{2}$ darzustellen, sage man $x^2 = 9a^2 \times 2 = 9a \times 2a$, woraus $9a : x : 2a$; d. h. man construire zu 9a und 2a die mittlere geometrische Proportionallinie (§. 210 Zus.).

§. 224.

VIII. Man construire $x = \frac{1}{2} a \sqrt{5}$.

Aufl. und Bew.: Man sage der gegebene Ausdruck ist einerley mit $x = \sqrt{(\frac{5}{4}a^2)} = \sqrt{(a^2 + \frac{1}{4} a^2)} = \sqrt{[a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2]}$, mithin ist x die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreyeckes, welches zu einer Kathete a und zur andern den halben Theil von a hat (§. 119. Zus. 2), wofür die Construktion nach §. 222. geschieht.

Zusatz: Um $x = \frac{1}{2} a \sqrt{3}$ darzustellen, construire man die Kathete eines rechtwinkeligen Dreyeckes (§. 222.

Zus. 2), in welchem a die Hypothenuse und die Hälfte von a eine Kathete ist; denn $x = \frac{1}{2} a \sqrt{3} = \sqrt{\frac{3}{4} a^2} = \sqrt{(a^2 - \frac{1}{4} a^2} = \sqrt{[a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2]}$.

§. 225.

IX. Es soll $x = \frac{a}{2} (\sqrt{5} - 1)$ construirt werden.

Auflösung und Beweis: $\frac{a}{2} (\sqrt{5} - 1) = \frac{a}{2} \sqrt{5} - \frac{a}{2}$. Die Construktion von $\frac{a}{2} \sqrt{5}$ ist aus §. 224. und jene von $\frac{a}{2}$ aus §. 217. ersichtlich. Und es ergibt sich demnach, daß man, um x zu erhalten, nur von der Hypothenuse eines rechtwinkeligen Dreyeckes, dessen Katheten a und $\frac{1}{2}$ a sind, die Linie $\frac{1}{2}$ a abschneiden darf (§. 216).

Zusätze:

1) Soll man $x = r - \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4} a^2)}$ construiren, so darf man nur von der Länge r die Kathete eines rechtwinkligen Dreyeckes abschneiden, welch' letzteres r selbst zu seiner Hypothenuse, und $\frac{a}{2}$ zu seiner anderen Kathete hat (§. 224. Zus. und §. 216); denn
$$r - \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4} a^2)} = r - \sqrt{[r^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2]}$$

2) Um $z = \sqrt{\{2r[r - \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4} a^2)}]\}}$ darzustellen, construire man nach §. 210 Zus. die mittlere Proportionallinie zwischen 2r und $r - \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4} a^2)}$; denn $z = \sqrt{\{2r[r - \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4} a^2)}]\}}$ oder
$$z^2 = 2r[r - \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4} a^2)}] \text{ und daraus}$$
$$2r : z : r - \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4} a^2)}.$$

Die Construktion für $r - \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4} a^2)}$ bestimme man den Zus. 1.

3) Es ist demnach in einem jeden Kreise die Seite eines regulären 2n Eckes die mittlere Proportionallinie zwischen dem Diameter des Kreises und der Kathete eines rechtwinkeligen Dreyeckes, dessen Hypothenuse der Radius des Kreises und dessen andere Kathete die Hälfte der Seite des n Eckes ist (§. 115 und Zus. 2 in diesem §.) Die Construction für die Seite des 2n Eckes geschieht nach Zus. 2.

§. 226.

X. Man construire $y = \frac{(a - b)\, cd}{(e + f)\, g}$.

Auflösung und Beweis. Aus $y = \frac{(a - b)\, cd}{(e + f)\, g}$ ist $y\,(e + f) = (a - b)\frac{cd}{g}$, woraus $(e + f) : (a - b) = \frac{cd}{g} : y$; d. h. man construire zu $(e + f)$, $(a - b)$ und $\frac{cd}{g}$ nach §. 210 die vierte Proportionllinie. Die Construktion von $(e + f)$ und $(a - b)$ findet man nach §. 216. und jene von $\frac{cd}{g}$ nach §. 219.

Zusatz. Um $x = \frac{a\sqrt{(b^2 + c^2)}}{b^2 + c^2}$ zu construiren, suche man nach §. 210. die vierte Proportionallinie zu

$(b^2 + c^2)$, $\sqrt{(b^2 + c^2)}$ und a; denn

$(b^2 + c^2)\, x = a\sqrt{(b^2 + c^2)}$ woraus

$(b^2 + c^2) : \sqrt{(b^2 + c^2)} = a : x$.

§. 227.

XI. Man soll $x = \frac{a}{b}\,(c + d) + m$ construiren.

Auflösung und Beweis: Aus $x = \frac{a}{b} (c + d) + m$ ist $x - m = \frac{a}{b} (c + d)$ oder $b (x - m) = a (c + d)$, woraus $b : a = (c + d) : (x - m)$. Man suche demnach vor allem die vierte Proportionallinie (nach §. 210.) zu b, a und (c + d), so erhält man die Länge $x - m$. Um endlich x selbst darzustellen, verlängere man die gefundene Länge um das Stück m (§. 216.); denn $(x - m) + m = x$.

§. 228.

XII. Es soll $x = (a + b)^2$ construirt werden.

Auflösung und Beweis: $x = (a + b)^2$ also

$$x = a^2 + 2ab + b^2$$

welcher Ausdruck sich nach §. 219. Zus. 1. und §. 218. leicht construiren läßt.

II. Hauptstück.

Die geometrische Terrainaufnahme.

I. Abschnitt.

Vorkenntnisse.

§. 229.

a) Erklärungen.

Dieses Hauptstück unterrichtet in der Aufnahme der Erdoberfläche mittelst der hierzu nöthigen Instrumente so weit es durch die Sätze der Geometrie möglich ist. Bey näherer Betrachtung wird man demnach finden, daß sich dieses Hauptstück nur auf die Aufnahme der Erdoberfläche durch Messung von Linien beschränkt, und in zwey Abtheilungen, nehmlich in die Ausmessung der Größen, und in die Darstellung dieser Größen zerfällt. Eine jede Aufgabe über diesen Gegenstand theilt sich demnach auch in diese beyden Abtheilungen, und zwar: entweder ist die Darstellung schon mit der Ausmessung verbunden, oder es muß jedes besonders geschehen. Auch hier geschieht diese Darstellung auf eine Ebene (auf ein Zeichnungsblatt) und man nennt dieselbe sodann den Grundriß des aufgenommenen Theiles, der Gegend.

§. 230.

Eine jede gerade Linie, welche nach der Richtung der Schwere gezogen wird, heißt eine Vertikallinie, und jene Fläche, welche man sich auf der Richtung der Schwere senkrecht deckt, eine Horizontalfläche. Eine jede in dieser Fläche gezogene Linie nennt man eine Horizontallinie. Man stellt die Vertikallinien durch frey herabhängende Fäden, welche an einem Ende mit einem Stückchen Bley oder anderen Gegenständen beschwert sind, anschaulich dar. Es ist bekannt, daß diese Richtungen der Schwere im Mittelpunkte der Erde zusammenstossen, und auf einer unbeweglichen Wasserfläche senkrecht stehen; also ist die Oberfläche eines stillstehenden Wassers eine Horizontalfläche.

§. 231.

Je größer eine Kugel ist, desto mehr kömmt ein kleiner Theil ihrer Oberfläche einer Ebene gleich; und es findet selbes dermaßen bey der Oberfläche unserer Erde statt, daß man nicht allein eine ruhige Wasserfläche von 12 — 15 Quadratmeilen im Umfange, sondern auch ein eben so großes Stück Flachland als eine Horizontalebene annehmen kann. Aus diesem folgt nun:

1) Man kann sich in einem jeden Punkte der Erdoberfläche eine Horizontalebene decken, und dieselbe nach allen Richtungen hin erweitern.

2) Alle Vertikallinien, welche nicht weit von einander entfernt liegen, sind parallel (§. 127. Zus. 1).

3) Eine jede Ebene, welche man sich durch die Vertikallinie gelegt denkt, ist auf der Horizontalebene senkrecht (§. 212. Zus.) und heißt eine Vertikalebene.

4) Alle Horizontalebenen sind unter sich parallel (§. 133 Zusatz und §. 230).

§. 232.

Die Durchschnittspunkte verschiedener Vertikallinien mit einer beliebig angenommenen Horizontalebene, nennt man die auf den Horizont reducirten Punkte der Gegend. Z. B. Fig. 131 sind D, F, H die auf die Horizontalebene durch AB reducirten Punkte von C, E, G. Es sind sodann die Höhen CD, EF, GH die Höhen der Punkte C, E, G über die Horizontalebene durch AB, und DF, FH die auf die Horizontalebene reducirten Entfernungen von den wahren Entfernungen der Punkte C, E, G. Durch eine solche Reducirung einer ganzen Gegend von verschiedenen Punkten aus erhält man die auf die Horizontalebene reducirte Figur, d. h. den Grundriß dieser Gegend, eine dieser Gegend ähnliche Figur.

§. 233.

b) Erfordernisse zur geometrischen Aufnahme der Erdoberfläche.

Diese Erfordernisse sind:

α) Eine gründliche Kenntniß der reinen und der darstellenden Elementar-Geometrie, welche dieses Lehrbuch vollständig enthält.

β) Die nöthigen Geräthschaften und Instrumente, als:

1) Ein Meßtisch, d. i. eine Platte oder ein Reißbrett, welches auf einem Gestelle (Stativ) mit drey Füßen ruht. Ein guter Meßtisch muß so eingerichtet seyn, daß das Reißbrett leicht in die horizontale Lage gebracht, dann in derselben nach Belieben umhergedreht, und in der bestimmten Lage festgestellt werden kann.

2) Markirpflöckchen oder Stäbe von Holz, allenfalls am Fuße mit Eisen beschlagen, um damit die nöthigen Punkte markiren zu können.

3) Stangen oder Fähnchen mit greller Farbe, um entfernte Punkte zu bezeichnen.

4) Ein Senkel oder Senkbley d. i. ein Stückchen Faden oder Schnur, an dessen einem Ende sich ein Stückchen Bley oder ein anderer schwerer Körper befindet, zur Bestimmung der Vertikallinien (§. 230).

5) Eine eiserne Meßkette von 50, höchstens 100 Fuß Länge, mit ein paar Kettenstäben, welch' letztere an den zwey Enden der Kette in Ringe eingesteckt werden, um mittelst ihrer die Kette beym Messen anspannen zu können; jedes Glied der Kette muß genau einen Fuß halten.

6) Natürliche Maasstäbe, d. i. Stäbe oder Latten (Meßlatten) von Holz, auf welchen das landesübliche Längenmaas in natürlicher Größe aufgetragen und in seine Unterabtheilungen eingetheilt ist.

7) Ein verjüngter Maasstab d. i. ein Maasstab von solcher Beschaffenheit, daß man mittelst desselben eine Figur in natürlicher Größe durch eine kleinere ähnliche darstellen kann. Entweder hat man denselben schon auf Messing gravirt, oder man muß sich ihn erst selbst auf Papier verfertigen.

8) Eine Setzwage oder Wasserwage zur Horizontalstellung des Meßtisches und der Meßlatte. Erstere ist ein gleichschenkliges Dreyeck von gut ansgetrocknetem Holze, an dessen Spitze sich ein Senkel befindet; letztere ein, mit Was-

ser oder besser mit Weingeist so weit gefüllter und gut verschlossener, Glascylinder, daß ein kleines Luftbläschen in demselben ersichtlich ist. Steht bey der Setzwage das Senkel genau auf der Grundlinie des Dreyeckes senkrecht, oder befindet sich bey der Wasserwage das Luftbläschen obenher genau in der Mitte des Gefäßes, so steht der Meßtisch oder die Meßlatte ꝛc. horizontal (§. 230 u. 231).

9) Ein Diopterlineal oder eine Alhidadenregel (Absehe- oder Visirlineal), ein Lineal von Messing, welches an seinen beyden Enden zwey senkrecht aufstehende messingene Plättchen hat. Eines derselben, durch welches das Auge sieht, hat in seiner Mitte senkrecht auf das Lineal einen schmalen Einschnitt und heißt die Oculardiopter; das andere ist ganz durchbrochen, und hat in seiner Mitte senkrecht auf das Lineal einen feinen Faden, und heißt die Objectivdiopter. Zu den Eigenschaften eines guten Diopterlineals gehört vorzüglich, daß der Einschnitt an der Oculardiopter mit dem Faden an der Objectivdiopter genau in einer und derselben Vertikalebene liegt, welche hier die Visirebene genannt wird. Wenn man auf größere Entfernungen zu messen hat, so bedient man sich statt der beyden Dioptern eines Fernrohres (Tubus).

10) Die zur Darstellung nöthigen Instrumente (§. 190).

γ) Eine richtige Orientirung, um sowohl die Lage eines jeden einzelnen Theiles zu erkennen, als auch bey der Aufnahme mehrerer Theile die angränzenden

in der gehörigen Lage miteinander zu verbinden. Beydes wird am einfachsten durch die **Magnetnadel** (Boussole) erreicht.

§. 234.

c) Aufgaben.

I. Man soll einen natürlichen Maasstab verfertigen.

Auflösung u. Beweis: (Fig. 132.) Man ziehe eine gerade Linie, und trage darauf die Größe eines Zolles gleich AB = BC = CD 2c. 10mal auf, so ist die Länge dieser Linie der Größe eines geometrischen Fußes gleich (§. 129. I. Th.). In A, B, C, D 2c. errichte man Senkrechte auf die angenommene Linie (§. 196) und mache dieselben unter sich nach Belieben gleich lang. Man theile AB und AE in 10 gleiche Theile, und ziehe durch die Theilungspunkte der letztern lauter Parallelen zu AD. Ein jeder Theil von AB gibt die Größe einer geometrischen Linie an (§. 127, I. Th.). Einen solchen Theil = Fa trage man von F nach E zu auf, ziehe Ba, und zu dieser Linie durch alle Theilungspunkte von AB lauter Parallelen, so werden dadurch 10 gleiche Theile auf EF abgeschnitten, wovon jeder einer geometrischen Linie gleich ist (§. 51. Zus. 5.). Endlich setze man an die Theilungspunkte der Linien AB und AE oder BF die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, und der Maßstab ist vollendet, von welchem man jede verlangte Dimension abnehmen kann. Denn $AB = \frac{1}{10}' = 1''$, und auf dieser Linie genommen ist

$$B1 = \tfrac{1}{10}\,AB = 0{,}1'' \text{ oder 1 Linie,}$$

$$B2 = \tfrac{2}{10}\,AB = 0{,}2'' \text{ oder 2 Linien,}$$

$$B3 = \tfrac{3}{10}\,AB = 0{,}3'' \text{ oder 3 Linien u. s. w.}$$

Betrachtet man die Zahlen auf den Theilungspunkten von BF, so ist BF : B1 = Fa : b1 (§. 58.). Es ist aber

$Bi = \frac{1}{10}$ BF (verm. Constr.), also ist auch $b1 = \frac{1}{10}$ Fa $= \frac{1}{100}$ AB $= 0,01''$ oder 1 Punkt. Eben so erhält man $c2 = \frac{2}{10}$ Fa $= \frac{2}{100}$ AB $= 0,02''$ oder 2 Punkte, $d3 = \frac{3}{10}$ Fa $= \frac{3}{100}$ AB $= 0,03''$ oder 3 Punkte u. s. w. Es ist demnach also $g1 = 0,11''$; denn $g1 = gb + b1 = B1 + b1 = 0,1'' + 0,01'' = 0,11''$. $m4 = 0,54''$; denn $m4 = fm + f4 = 5 . B1 + f4 = 0,5'' + 0,04'' = 0,54''$. $no = 2,87''$; denn $no = n7 + po + p7 = 2'' + 0,8'' + 0,07'' = 2,87''$ u. s. w.

Zusatz: Soll der Maßstab für den Duodecimalfuß verfertiget werden, so mache man AB einem Duodecimalzolle gleich und trage denselben 12mal auf. Sowohl AB als AE theile man in 12 gleiche Theile, wovon bey letzterer ein Theil beliebig groß seyn kann, und verfahre übrigens wie beim Decimalmaße.

§. 235.

II. Es soll ein verjüngter Maasstab verfertiget werden.

Aufl. und Bew. (Fig. 132.) Man ziehe eine gerade Linie und theile sie in mehrere gleiche Theile, d. h. man mache AB = BC = CD u. s. w. In den Punkten B, C, D etc. errichte man Senkrechte, und verfahre übrigens wie §. 234., nur daß man an die Theilungspunkte der Linie AB die Zahlen 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 setze, so stellt die erwähnte Figur 132 einen verjüngten Maasstab vor. Um dieses zu beweisen, gebe man der Linie AB ein bestimmtes Maas, z. B. 100', so ist Fa $= \frac{1}{10}$ AB $= 10'$. Ebenso ist auch Fq $= 2 .$ Fa $= \frac{2}{10}$ AB $= 20''$ u. s. w. Ferners BF : B1 = Fa : b1; da nun $B1 = \frac{1}{10}$ BF (verm. Constr.), so ist auch $b1 = \frac{1}{10}$ Fa $= 1'$. Ebenso erhält man $c2 = 2'$, $d3 = 3'$ u. s. w. Es ist demnach $m4 = 54'$, $o7 = 87'$, $sm = 154'$ u. s. w.

Zusätze:

1) Wenn man dem verjüngten Maasstabe 10 solche gleiche Theile, wie hier AB, BC etc. von beliebiger Größe gibt, so heißt derselbe ein tausendtheiliger.

2) Gewöhnlich gibt man in Bayern dem tausendtheiligen Maasstabe die Länge eines ganzen oder halben bayerischen Fußes, so, daß also AB, BC etc. die Länge eines ganzen oder halben Zolles ist.

3) Will man die Größe einer Linie nach diesem verjüngten Maasstabe auftragen, so nehme man das gegebene Maas mit dem Zirkel von dem verjüngten Maasstabe ab und trage es aufs Papier.

4) Will man mittelst eines verjüngten Maasstabes die Größe einer geraden Linie messen, so nehme man selbe mit dem Zirkel, und suche ihr Maas auf dem Maasstabe.

5) Eine jede beliebige Länge wird durch eine gleichnamige im verjüngten Maase vorgestellt, d. h. es ist erstere der letzteren im verjüngten Maase gleich.

§. 236.

III. Man soll einen Stab oder eine Stange senkrecht auf den Horizont oder vertikal in den Erdboden setzen.

Auflösung und Beweis: Man bringe die Stange oder den Stab durch ein Visiren mit einem Senkel nach zwey Richtungen zu in eine Ebene, so liegt die Richtungslinie der Stange oder des Stabes in zwey Vertikalebenen zugleich (§. 231, 3tens), d. h. sie ist beyden gemein, sie ist die Durchschnittslinie derselben (§. 129.). Es ist demnach die Richtung der Stange oder des Stabes selbst vertikal (§. 126.); und befestiget man die Stange oder den

Stab nach dieser Richtung in den Boden, so steht die Stange oder der Stab senkrecht oder vertikal.

Zusatz: Alle Stäbe oder Stangen, welche bey Vermessungen von Horizontallinien gebraucht werden, müssen auf die angegebene Art vertikal aufgestellt werden.

§. 237.

IV. Es soll zwischen zwey gegebenen Punkten, zu welchen man ungehindert sehen und gehen kann, eine gerade Linie abgesteckt werden.

Auflösung und Beweis: Wenn die zwey gegebenen Punkte nicht ohnehin schon bezeichnet sind, so befestige man dort vertikale Stangen oder Fähnchen (§. 236.), bleibe an einem dieser Punkte stehen, und schicke einen Gehülfen mit einem Stabe nicht zu weit entfernt in die Richtung der auszusteckenden Linie. Hier richte man diesen Stab durch ein Visiren von einem Endpunkte der Linie nach dem andern so ein, daß alle drey Zeichen einander decken, und befestige den Stab senkrecht; derselbe liegt sodann mit den, in den Endpunkten der gegebenen Linie angebrachten Stäben in einer und derselben Vertikalebene, und durchschneidet die Durchschnittslinie dieser Vertikalebene mit der Horizontalebene. Auf dieselbe Art bestimme man in dieser eingebildeten Durchschnittslinie noch mehrere Punkte, so ist dadurch die verlangte Linie ausgesteckt.

Zusatz: Soll eine ausgesteckte gerade Linie auf dem Felde verlängert werden, so richte man nach derjenigen Seite zu, wo die Verlängerung geschehen soll, mehrere Stäbe nach einander so in die Richtung der ausgesteckten Linie ein, daß jeder derselben genau diejenigen der bereits ausgesteckten Linie deckt; hierdurch wird die erwähnte Vertikalebene, und durch diese die Durchschnittslinie derselben mit der Horizontalebene verlängert (Aufg.).

§. 238.

V. Es soll auf dem Felde durch einen gegebenen Punkt auf eine ausgesteckte gerade Linie in der Horizontalebene eine Senkrechte errichtet werden.

Aufl. und Bew. (Fig. 10.) Die ausgesteckte Linie sey AB und der gegebene Punkt C, so mache man von C aus CD = CE und bemerke die Punkte D und E mit Pflöckchen. Aus D und E beschreibe man mit einer Latte oder einer gut angespannten Meßkette oder Schnur, deren Länge größer als CD seyn muß, Bögen, so erhält man den Durchschnittspunkt F derselben, und durch das Ausstecken der Linie CF (§. 237) die verlangte Senkrechte (§. 196).

Die Auflösung dieser Aufgabe kann auch auf folgende Art geschehen:

(Fig. 8.) Man biege die Meßkette oder Schnur so in 3 Theile CE, BC und BE, daß $BE^2 = BC^2 + CE^2$, und bilde aus denselben ein Dreyeck (§. 198), so ist dieses rechtwinklig (§. 62, Zus. 4). Legt man nun eine Kathete BC dieses Dreyeckes von dem Punkte C aus längs AB, so ist also CE senkrecht auf AB; steckt man endlich in der Richtung von AB z. B. in D einen Stab ein, so ist CD senkrecht auf AB.

Zusätze:

1) Macht man bey letzterer Art die beyden Katheten gleich 3' und 4', und die Hypothenuse gleich 5', so kann man die gegebene Aufgabe lösen; denn 25 = 16 + 9 (§. 62, Zus. 4).

2) Kommen die Errichtungen von Senkrechten häufig vor, so geschieht das Ausstecken derselben leichter mittelst des sogenannten katoptrischen Winkel-

rohs *), dessen Einrichtung und Gebrauch man ausführlich in der Anleitung zur Perpendikularmethode oder der Art mit rechten Winkeln aufzunehmen, vom Freyherrn Philipp von Reichlin ausführlich findet.

§. 239.

VI. Es soll auf dem Felde ein Winkel abgesteckt werden, welcher einem anderen gegebenen gleich ist.

Aufl. und Bew. Man verfahre gerade so, wie §. 194, indem man sich zur Beschreibung der Kreisbögen der Meßlatte oder Kette bediene.

Zusatz: Ist ein auf dem Felde abgesteckter Winkel auf dem Papiere nach zu zeichnen, so verfahre man eben so, nur nehme man die Maase von AK, AJ und JK (Fig. 21) im verjüngten Maasstabe auf das Papier und construire daraus ein Dreyeck (§. 198), so ist KAJ der verlangte Winkel, denn das Dreyeck KAJ ist dem auf dem Felde ähnlich, weil die Seiten proportionirt sind (§. 60, Zus. 6), folglich sind auch die gleichliegenden Winkel sich gleich. (§. 60, Zus. 1.)

§. 240.

VII. Man soll auf dem Felde zu einer ausgesteckten geraden Linie eine Parallele ziehen.

Aufl. und Bew. (Fig. 14.) Ist CD die gegebene Linie, so errichte man in zwey beliebigen Punkten J und H Senkrechte (§. 238), mache dieselben einander gleich, und stecke in der Richtung von den Endpunkten dieser Senkrechten eine gerade Linie AB aus, so ist solche zu CD parallel (§. 27).

*) Von dem churpfalzbayerischen Landesdirektionsrathe Ammann erfunden.

Zusatz. (Fig. 133.) Soll zu AB durch den Punkt C eine Parallellinie abgesteckt werden, so setze man zwischen B und C einen Stab in E so ein, daß B, E und C in einer geraden Linie liegen. Hierauf suche man zu BE, EC und AE die vierte geometrische Proportionallinie, und trage sie in der Verlängerung von AE auf (§. 237, Zus.), so ist CD die verlangte Parallele; denn △ ABE ∽ △ CDE (§. 61), folglich BE : EC = AE : DE (§. 60, Zus. 5) und ABE = DCE (§. 60, Zus. 1), woraus CD ♯ AB folgt (§. 29).

II. Abschnitt.

Die geometrische Terrainaufnahme mit Stäben.

§. 241.

a) Erklärungen.

Auch mit Stäben allein, ohne Meßtisch und Diopterlineal, kann man Linien und Flächen aufnehmen. Man nennt diesen Theil der angewandten Geometrie die Baculometrie (von Baculus, Stab). Diese Art des Aufnehmens ist jedoch in den meisten Fällen weitläufig und umständlich, weßhalb sie nur in Ermangelung anderer Instrumente ihre Anwendung findet.

§. 242.

b) Die Aufnahme gerader Linien.

Aufgabe.

I. Es soll eine, in allen Punkten zugängliche, gerade Linie aufgenommen werden.

Aufl. und Bew. Man messe mit der Kette von einem Endpunkte der ausgesteckten Linie bis zum anderen, indem man dieselbe immer in horizontaler Richtung gut anspannt, und dabey streng beobachtet, daß keines ihrer Glieder verbogen oder überschlagen ist. Die aufgefundene Größe dieser Linie nehme man mit dem Zirkel auf dem verjüngten Maasstabe, und trage selbe auf das Papier auf (§. 235, Zus. 3).

§. 243.

II. Eine gerade Linie aufzunehmen, welche nicht in allen Theilen, wohl aber an beyden Endpunkten zugänglich ist.

Aufl. und Bew. Hier können zwey Fälle statt finden: entweder kann man von einem Endpunkte der Linie zum andern sehen, oder man kann es nicht.

Erstens (Fig. 134): Man stecke in der Richtung der gegebenen Linie AB eine Länge AE von A an, und eine andere BF von B an so weit aus (§. 237) als möglich ist, dann errichte man in E und F zwey Senkrechte CE = DF (§. 238) von solcher Länge, daß zwischen C und D kein Hinderniß im Messen mehr statt findet. Nun messe man AE, CD u. BF ab (§. 242), so ist die Summe dieser Linien der gesuchten Linie gleich; denn AE + EF + FB = AB, es ist aber CD = EF (§. 51, Zus. 5), folglich AE + CD + FB = AB. Endlich trage man AB nach §. 215 und 242 aufs Papier.

Zweytens (Fig. 135): Die aufzunehmende Linie sey AB. Man wähle einen 3ten Punkt C, von wo aus man die Objekte A u. B sehen und zu ihnen messen kann. Hier setze man einen Stab oder eine Fahne ein, und

messe AC und BC (§. 242). Nun verlängere man AC = CE und BC = CD (§. 237, Zus.), und messe DE, welches die Größe der gesuchten Weite angibt; denn △ ABC ≌ △ DCE (§. 49). Hat man jedoch nicht Platz genug, um AC und BC zu verlängern, so suche man (Fig. 136) nach §. 238 zweyte Art einen Punkt C auf, welcher den Scheitel eines rechten Winkels gegen A u. B bildet, und messe AC u. BC, so ist $AB = \sqrt{(AC^2 + BC^2)}$. (§. 119, Zus. 2.) Hat man nun die Größe von AB auf eine oder die andere Art gefunden, so trage man solche nach §. 235, Zus. 3 auf.

§. 244.

III. Es sey in der Verlängerung einer gegebenen Linie ein Punkt zu bestimmen, wenn man wegen eines Hindernisses nicht dahin sehen kann.

Aufl. und Bew. (Fig. 137.): Gesetzt, die gegebene Linie sey AM, so errichte man auf selbe in M eine Senkrechte BM (§. 238); ebenso auch BC auf BM und CD auf BC, mache aber CD so groß, daß man von D aus nach einen solchen fraglichen Punkt sehen und messen kann; dann verlängere man DB auf dem Papiere, so wird diese die Verlängerung von AM in E schneiden und △ BME ∽ △ DCB (§. 60), woraus CD : BD = BM : BE (§. 60, Zus. 5). Mißt man nun CD, BD u. BM, so erhält man die Größe von BE. Diese trage man in der Verlängerung von DB auf (§. 237, Zus.), so liegt E in der Verlängerung von AM, denn AMB = BME = R (verm. Constr.). Ganz auf demselben Wege findet man den Punkt E auch durch Construktion.

Zusatz: Durch diese Art den Punkt E zu bestimmen,

ist auch zugleich die Entfernung desselben von M bekannt; denn EM = $\sqrt{(BE^2 - BM^2)}$ (§. 119, Zus. 3).

§. 245.

IV. Man soll die Entfernung zweyer Punkte finden, wenn nur einer derselben zugänglich ist.

Aufl. und Bew. (Fig. 138.): Die zu suchende Entfernung sey AB. Man wähle einen Punkt C, von dem aus man A u. B sehen kann, messe BC, und verlängere sie so, daß CD ihr gleich wird. An D stecke man einen Winkel y ab, welcher gleich x ist (§. 239), und setze in der Richtung von D nach E einen Stab E so ein, daß derselbe zugleich auch in der Richtung von AC sich befindet, so ist DE = AB; denn △ ABC ≅ △ DEC (§. 51). Durch Construktion erhält man AB auf demselben Wege.

Zusätze:

1) Sollte nicht hinlänglich Raum vorhanden seyn, die Größe von BC in ihrer Verlängerung aufzutragen, so nehme man nur einen beliebigen Theil von BC z. B. das Viertel, trage selbes in der Verlängerung von BC auf, so, daß CF = $\frac{1}{4}$ BC wird, stecke den Winkel m = x ab, und suche in der Richtung von FG einen Punkt G, welcher zugleich auch in der von AC liegt, so ist △ CFG ∽ △ ABC (§. 60), also FG = $\frac{1}{4}$ AB (§. 60, Zus. 5), und folglich AB = 4 FG.

2) Auch läßt sich die gegebene Aufgabe auf folgende einfache Art lösen. Man errichte an dem zugänglichen Punkte BG auf AB eine Senkrechte BG (§. 238) von beliebiger Länge. Ebenso errichte man auch auf letzterer Linie durch einen beliebigen Punkt J eine Senkrechte, und setze in dieser einen Stab in der

Richtung von AG ein. Nun messe man JG, BG u. JH, so ist AB zu diesen Dreyen die vierte Proportionallinie; denn AB # HJ (§. 29), folglich JG : BG = HJ : AB (§. 58).

§. 246.

V. Man soll die Entfernung zweyer Objekte finden, wenn man zu keinem derselben gelangen kann.

Auflösung und Beweis: (Fig. 139.) Man setze in der Richtung der beyden Objekte A und B in dem Punkte C einen Stab ein, und errichte hier auf AC eine Senkrechte CD von beliebiger Länge (§. 238). In einem beliebigen Punkte E der letzteren errichte man ebenfalls eine Senkrechte EH, setze in derselben in der Richtung DB und DA die Stäbe F u. G ein, und messe DE, DC u. FG, so ist AB die vierte Proportionallinie zu diesen Dreyen; denn $\triangle$ DFG $\backsim$ $\triangle$ DBA (§. 60), folglich DE : DC = FG : AB (§. 60, Zus. 7). In der Konstruktion verfahre man ebenso.

Zusatz: Kann man jedoch in der Richtung von AB keinen Raum finden, um noch einen dritten Punkt ausstecken zu können, so wähle man (Fig. 140) einen Stanpunkt C, und bestimme die Entfernung desselben von A u. B nach §. 245. Nun nehme man gleichnamige Theile von diesen Linien, z. B. $\frac{1}{n}$, trage von C aus längs AC die Linie $CD = \frac{1}{n}$ AC und längs BC die Linie $CE = \frac{1}{n}$ BC auf, und messe DE, so ist selbes $\frac{1}{n}$AB; denn $\triangle$ DCE $\backsim$ $\triangle$ ACB (§. 61), folglich CD : CA = DE : AB (§. 60, Zus. 5); ist nun $CD = \frac{1}{n}$ CA, so ist auch $DE = \frac{1}{n}$ AB. Aus diesem folgt endlich AB = nDE.

§. 247.

c) Die Aufnahme krummer Linien.

α) Erklärungen.

Bey einer jeden Aufnahme von krummen Linien ist es nothwendig, sich eine gerade Linie abzustecken, von welcher aus die nöthigen Punkte der krummen Linie bestimmt werden können; diese gerade Linie heißt die Abscissenlinie oder Standlinie, und derjenige Punkt, von welchem die Vermessungen aus geschehen, ihr Anfangspunkt. Diejenigen geraden Linien, welche man sich aus verschiedenen Punkten der krummen Linie auf die Standlinie senkrecht gezogen denkt, nennt man die Ordinaten dieser Punkte, und diejenigen Theile der Standlinie zwischen den Ordinaten und dem Anfangspunkte die dazu gehörigen Abscissen. So z. B. ist (Fig. 136) DE die Standlinie, und gilt D als Anfangspunkt, so sind DQ, DR, DS, DT ꝛc. die Abscissen und QG, SF ꝛc. die dazu gehörigen Ordinaten. Es ist demnach die Lage eines jeden Punktes einer krummen Linie gegen die Standlinie durch seine entsprechende Abscisse und Ordinate bestimmt, und zwar, wenn die Ordinaten der Punkte G und U positiv sind, so ist jene von F negativ (§. 214); ist die Ordinate eines Punktes o, so liegt derselbe in der Standlinie selbst, wie z. B. R und T.

§. 248.

β) Aufgabe.

Es soll eine, in allen Punkten zugängliche krumme Linie aufgenommen werden.

Aufl. und Bew. (Fig. 136.) Die aufzunehmende krumme Linie sey GFJ. Man stecke die Standlinie DE ab, und wähle den Punkt D als Anfangspunkt. Von allen merklichen Krümmungspunkten G, S, L, J der krummen Li=

nie ziehe man Ordinaten GQ, SF, LU und JE, und messe sowohl diese als auch die dazugehörigen Abscissen. Die Größe und Lage derselben bemerke man sogleich in einem Manual oder Brouillon. Ebenso messe man auch die Abscissen DR und DT; die Ordinaten sind hierfür o (§. 247). Endlich stelle man die Größe und Lage der Abscissen und Ordinaten auf dem Papiere nach dem verjüngten Maasstabe dar, (§. 235 Zus. 3) und ziehe durch die Endpunkte der Ordinaten eine krumme Linie GFJ so viel als möglich jener auf dem Felde ähnlich.

Zusätze:

1) Je näher die Standlinie an der krummen Linie gewählt wird, desto kleiner werden die Ordinaten. Es wird dadurch die Arbeit ungemein erleichtert, indem die kleinen Ordinaten leicht nach einem geübten Augenmaase senkrecht auf die Standlinie gezogen werden können.

2) Je mehr Punkte durch Abscissen und Ordinaten bestimmt werden, desto ähnlicher wird die Figur auf dem Papiere jener auf dem Felde.

3) Wenn die Ordinaten bedeutend zu wachsen anfangen und nicht sobald wieder abnehmen, so reicht eine Standlinie nicht hin; in solchen Fällen sind neue Standlinien zu wählen, wie z. B. DK und EB, deren Lage zu der verlassenen durch die damit bildenden Winkel bestimmt werden muß (§. 239 Zus.).

4) Bey Aufnahmen von Straßen, welche mit Flüssen, oder von Flüssen, welche mit Straßen durchschnitten sind, müssen die vorhandenen Brücken in die Standlinie gebracht werden, wie z. B. R.

5) Die Punkte G, R, F, T, L, J können auch Endpunkte von geradlinigen Gebäuden, Gränzmauern ꝛc.

seyn, indem durch je zwey und zwey Punkte die Lage und Größe eines geradlinigen Gebäudes, einer geradlinigen Gränzmauer ꝛc. bestimmt ist (§. 14. Zus. 1 u. 2).

§. 249.

d) Die Aufnahme von Flächen.

α) Grundsatz.

Der Grundriß einer jeden Fläche muß immer eine ihr ähnliche Figur bilden.

§. 250.

β) Erklärungen.

Bey der Aufnahme von Flächen sind immer gewisse Vorbereitungen nöthig, welche in Folgendem bestehen:

1) Man besichtige (recognoscire) die aufzunehmende Gegend und verschaffe sich ein allgemeines Bild von derselben.

2) Man mache sich zugleich ein Brouillon von der Gegend, d. h. man entwerfe auf dem Papiere die ohngefähre Figur der Gegend, und bezeichne alle bemerkenswerthen Gegenstände darin auf, um die gefundenen Maaße einschreiben zu können.

3) Man suche sodann die schicklichsten Punkte zu den Standlinien aus, und nehme vorzüglich bey der Wahl des ersten Standpunktes darauf Rücksicht, daß wo möglich die ganze Gegend noch auf das Zeichnungsblatt gebracht werden kann.

4) Bey der Aufnahme von größern Gegenden scheide man die Theile derselben sogleich auf mehrere Zeichnungsblätter ab, und bemerke besonders die Punkte, an welchen dieselben zusammen stoßen.

§. 251.

γ) Aufgaben.

I. Man soll eine auf dem Felde bekannte geradlinige Figur in Grundriß legen (§. 232), wenn man innerhalb derselben messen kann.

Aufl. und Bew. (Fig. 55.) Man zerlege die Figur durch Diagonalen, welche sich nicht schneiden, in Dreyecke, messe alle Seiten und Diagonalen, und construire nach der Ordnung genommen allzeit aus 3 Linien im verjüngten Maaßstabe die Dreyecke GHJ, GJK, GKL und GLM aneinander, so ist GHJKLMG der verlangte Grundriß von ABC DEFA; denn GHJKLMG ∽ ABCDEFA (§. 249), weil die Dreyecke alle der Ordnung nach sich ähnlich sind, indem dieselben vermöge Construktion der Ordnung nach lauter proportionirte Seiten mit denjenigen der Figur am Felde haben (§. 60. Zus. 6).

Auf einfachere Art läßt sich diese Aufgabe folgendermaßen lösen:

(Fig. 141.) Man wähle zwischen zwey Winkelpunkten eine Standlinie AB, welche die Figur der Länge nach durchschneidet, und stecke dieselbe ab. Von dieser aus messe man an alle jene Punkte C, D, E, F, G, H und J am Perimeter, welche zur Bestimmung der Figur nothwendig sind, rechts und links die Ordinaten JP, CK, DL, HL, EM, GO und FN (§. 248) und die dazu gehörigen Abscissen AP, AK, AL, AM, AO und AN, so wie auch die Länge NB. Diese Längen schreibe man sich in das Brouillon ein, construire sich darnach die ganze Figur im verjüngten Maaßstabe auf Papier und verbinde die Endpunkte der Ordinaten der Ordnung nach durch gerade Linien, so ist die durch letztere eingeschlossene

Figur der verlangte Grundriß; denn sie ist jener auf dem Felde ähnlich, weil ihre einzelnen Theile der Ordnung nach ähnlich sind (§. 91).

Zusatz: Ist die aufzunehmende Fläche von beträchtlicherer Länge als Breite und mit aus- und eingehenden Winkeln behaftet, wie z. B. eine durch ein Dorf oder eine Stadt führende Straße (Fig. 142.) ABCDEFGHJKLMN, so muß die Standlinie ein- oder mehrmal gebrochen werden, wie selbes in §. 248. Zus. 3 gesagt wurde. Sollen hier auch noch die Nebenstraßen aufgenommen werden, so geschieht dieses durch Aussteckung der Nebenstandlinien OP und QR, von welchen aus dann die nöthigen Punkte ebenso durch Ordinaten und Absciſſen bestimmt werden.

§. 252.

II. Es ist eine auf dem Felde bekannte Figur in Grundriß zu legen, wenn man nicht so, wie es nach dem vorhergehenden §. nothwendig ist, innerhalb derselben messen kann.

Aufl. und Bew. (Fig. 142.) Diese aufzunehmende Figur sey z. B. der geradlinige Umfang eines Dorfes. Man stecke um diese Figur nach Erforderniß Standlinien RS, ST, TU und UR ab, und bestimme die Lage derselben gegeneinander durch die Winkel an ihren Vereinigungspunkten (§. 239 Zus.). Auf jeder dieser Standlinien bestimme man nun die nöthigen Punkte am Umfange des Dorfes, durch Ordinaten und Absciſſen, und verbinde die Endpunkte der Ordinaten der Ordnung nach durch gerade Linien mit einander, so erhält man den verlangten Grundriß (§. 248. Zus. 5).

Zusätze:

1) Ist die aufzunehmende Fläche von der Beschaffenheit, daß man ihren Grundriß wegen Hindernisse weder

auf die so eben beschriebene Art, noch auf die im §. 251 erwähnte erhalten kann, so messe man alle Seiten und nach §. 239 Zus. alle Winkel am Umfange, und construire darnach im verjüngten Maaßstabe eine Figur.

2) Können die Polygonswinkel Hindernisse halber nicht durch Sehnen gemessen werden, so verlängere man die Seiten rückwärts und messe die ihnen entsprechenden Vertikalwinkel.

§. 253.

III. Es soll eine auf dem Felde bekannte krummlinige Figur in Grundriß gelegt werden, wenn man innerhalb derselben messen kann.

Aufl. und Bew. (Fig. 143). Diese aufzunehmende Figur sey die Insel ACDBEFA. Man stecke auf derselben die Standlinie AB ab, bestimme von dieser aus, wie bekannt, die nöthigen Punkte am Ufer der Insel, und verbinde die Endpunkte der Ordinaten auf dem Papier aus freyer Hand durch eine, mit jener auf dem Felde möglichst ähnliche krumme Linie mit einander, so wird die dadurch dargestellte Figur jener auf dem Felde um so ähnlicher, je mehr Punkte durch Abscissen und Ordinaten bestimmt wurden (§. 248, Zus. 2). Die Punkte n, p und r können jedoch nicht mehr auf AB bestimmt werden; man stecke deßhalb eine Nebenstandlinie BE, senkrecht auf AB ab, und bestimme von selber aus durch die Ordinaten mn, op und qr diese 3 Punkte.

§. 254.

IV. Eine auf dem Felde bekannte krummlinige Figur in Grundriß zu legen, wenn man innerhalb derselben nicht messen kann.

Aufl. und Bew. (Fig. 143.): Man stecke um diese Figur eine geradlinige GHIK aus, nehme die Seiten derselben als Standlinien an, und bestimme sowohl ihre Lage gegeneinander durch die Winkel, unter welchen sie zusammenstossen (§. 239, Zus.), als auch von ihnen aus die nöthigen Punkte am Ufer des Sees durch Abscissen und Ordinaten (§. 248). Um die nöthigen Punkte an der Landzunge zu erhalten, ist von der Standlinie GH aus eine Nebenstandlinie LM, und von dieser aus abermals eine solche NO nöthig; die Wahl dieser Nebenstandlinien hat immer wo möglich senkrecht auf die verlassene zu geschehen, indem das Auftragen von rechten Winkeln leichter, als von schiefen ist.

III. Abschnitt.

Die geometrische Terrainaufnahme mit dem Meßtische.

§. 255.

a) Erklärungen.

Bey Aufnahmen mit dem Meßtische sind allzeit folgende Vorkehrungen zu beobachten:

1) Auf die Meßtischplatte wird vor dem Beginnen der Arbeit ein reines Blatt Papier gespannt; hierdurch ist es möglich, die Darstellung unmittelbar schon mit der Ausmessung zu verbinden, worin der wesentlichste Nutzen eines Meßtisches besteht.

2) Jeder Punkt auf der Platte, von welchem aus eine Vermessung geschieht, muß in einer Vertikallinie mit dem corespondirenden auf der Erdoberfläche seyn. Dieses wird dadurch bewerkstelliget, daß man den Meßtisch

mit dem bereits angemerkten Punkte auf dem Zeichnungsblatte so viel als möglich nach dem Augenmaaße in vertikaler Richtung über den corespondirenden Punkt auf der Erde bringt, dann ein Senkel (§. 233, Lit. β 4tens) unter die Platte an die Stelle des Punktes hält und den Tisch so lange verrückt, bis beyde Punkte in der Fadenlinie des Senkels sich befinden.

3) Die Platte des Tisches muß sich immer genau in horizontaler Lage befinden. Selbes geschieht mittelst der Wasserwaage (§. 233, Lit. β 8tens), wobey die Platte durch die am Meßtische angebrachten Correctionsschrauben in die horizontale Lage gebracht, und, wenn sie sich in derselben befindet, durch Stellschrauben festgestellt wird.

§. 256.

b) Die Aufnahme gerader Linien und Winkel.

Aufgaben.

I. Einen am Felde bekannten Winkel aufzunehmen.

Aufl. und Bew.: Man bringe den Meßtisch über den Scheitelpunkt des gegebenen Winkels am Felde, und bestimme nach §. 255, 2tens vertikal ober demselben den correspondirenden Punkt auf der Platte. An diesem Punkte lege man das Diopterlineal (§. 233, Lit. β 9tens) an, visire nach den Richtungen der beyden Schenkel, und ziehe vom Scheitelpunkte aus längs der Schneide des Lineals, mittelst eines gut gespitzten Bleystiftes, die Schenkel selbst, so erhält man auf der Platte einen Winkel, welcher dem ausgesteckten gleich ist; denn die Platte des Meßtisches ist horizontal (§. 255, 3tens), und also mit der Horizontalebene des Winkels parallel (§. 231, 4tens); nun haben die

Schenkel auf der Ebene der Platte einerley Richtung mit jener des Winkels am Felde (vermöge Auflösung), folglich sind diese Winkel einander gleich (§. 128).

§. 257.

II. Es sey eine gerade Linie aufzunehmen, welche nicht in allen Theilen, jedoch an ihren beyden Endpunkten zugänglich ist.

Aufl. und Bew. (Fig. 135). Soll z. B. AB die zu suchende Weite seyn, so bestimme man einen dritten Punkt C, stelle hier den Meßtisch auf (§. 255), trage den Winkel ACB auf die Platte des Meßtisches (§. 256), messe die Linien AC und BC (§. 242), schneide dieselben nach einem verjüngten Maasstabe auf den Schenkeln in der Zeichnung ab (§. 235, Zus. 3), verbinde die Endpunkte dieser Schenkel durch eine gerade Linie und untersuche auf demselben verjüngten Maasstabe die Größe dieser Linie (§. 235, Zus. 4), so erhält man in letzterer auch die Weite AB nach dem natürlichen Maasstabe genommen; denn das vermöge der Auflösung erhaltene Dreyeck ist ähnlich mit jenem auf dem Felde (§. 61), und sind demnach 2 Seiten derselben einander gleich, so findet diese Gleichheit auch bey der dritten statt (§. 235, Zus. 5).

§. 258.

III. Es soll die Entfernung zweyer Objecte aufgenommen werden, wenn sich zwischen denselben ein Hinderniß befindet, und nur eines von ihnen zugänglich ist.

Aufl. u. Bew. (Fig. 144). Diese Entfernung sey AB und das Object A das zugängliche. Man suche einen Punkt C, von welchem aus man A und B sehen und nach A messen kann. Hier stelle man den Meßtisch auf (§. 255), visire mit den Dioptern nach A und B und bemerke die Richtungen auf

der Platte, messe AC und trage im verjüngten Maase die Länge derselben mit ac auf. Hierauf setze von den Meßtisch mit dem Punkte a gerade über A so, daß ac längs AC zu liegen kommt und visire von a nach B, so wird die nach dieser Richtung gezogene Linie jene von C nach B gezogene in b durchschneiden, und ab wird im verjüngten Maase die Entfernung AB geben (§. 235, Zus. 4); denn die Dreyecke ABC und abc sind ähnlich (§. 60), folglich AC : ac = AB : ab (§. 60, Zus. 5), und da AC = ac im verjüngten Maase (verm. Aufl.), so ist auch auf dieselbe Art AB = ab.

Zusatz: Ist das Hinderniß zwischen den beyden Objecten von der Beschaffenheit, daß man von A nach B nicht visiren kann (Fig. 145), so setze man in beliebiger Entfernung von C einen Stab in D und einen zweyten in der Richtung BD in E ein, messe AC, CD und CE, stelle den Meßtisch über C, visire nach A, D und E und trage auf den entsprechenden Visirlinien die Größe dieser Linien auf, so, daß AC = ac, CD = cd und CE = ce im verjüngten Maase wird. Nun ziehe man de und verlängere diese Linie, bis sie die Visirlinie von C nach B in b schneidet, so gibt ab im verjüngten Maase die Entfernung AB an; denn △ cde ∽ △ CDE (§. 61), also cde = CDE = cdb = CDB und △ cdb ∽ △ CDB (§. 60), woraus cd : CD = cb : CB (§. 60, Zus. 5). Nun ist cd im verjüngten Maase gleich CD, folglich auch cb auf dieselbe Art gleich CB. Es ist demnach auch △ acb ∽ △ ACB (§. 61), woraus ab im verjüngten Maase gleich AB folgt.

§. 259.

IV. Man soll die Entfernung zweyer Objecte aufnehmen, wenn man zu keinem derselben gelangen kann.

Aufl. und Bew. (Fig. 146). AB sey die zu messende

Weite. Man nehme zwey Punkte C und D an, von welchen aus man A und B sehen kann. Nun stelle man den Meßtisch in C auf (§. 255), visire nach A, B und D, messe CD und trage im verjüngten Maase die Größe derselben in der Richtung nach CD auf. Hierauf setze man den Meßtisch über D so, daß dc in die Richtung von DC kommt, und visire nach A und B, so werden diese Visirlinien die vorigen in a und b durchschneiden, und ab ist im verjüngten Maase die Weite AB; denn $\triangle$ acd $\backsim$ $\triangle$ ACD und $\triangle$ bcd $\backsim$ $\triangle$ BCD (§. 60), also

$$\left.\begin{array}{l} ac : AC = cd : CD \\ bc : BC = cd : CD \end{array}\right\}$$ (§. 60, Zus. 5), folglich

ac : AC = bc : BC, und da auch
acb = ACB, so ist $\triangle$ acb $\backsim$ $\triangle$ ACB (§. 61),
woraus ac : AC = ab : AB; es ist aber auch
ac : AC = cd : CD, folglich

ab : AB = cd : CD, und weil nun cd die Länge CD im verjüngten Maase angibt, so gilt selbes auch von ab in Bezug auf AB.

§. 260.

c) Die Aufnahme krummer Linien.

Aufgaben.

I. Es soll die krumme Linie GFI (Fig. 136) aufgenommen werden, wenn selbe in allen Punkten zugänglich ist.

Aufl. und Bew. Man stecke eine Standlinie DE ab, setze den Meßtisch über D und visire nach E. Nun messe man die nöthigen Abscissen und Ordinaten der krummen Linie, trage selbe im verjüngten Maasstabe auf, und ziehe durch die Endpunkte der Ordinaten eine, mit der gegebenen Linie am Felde, möglichst ähnliche krumme Linie, so

wird diese jener um so ähnlicher, je mehr man Punkte durch Abscissen und Ordinaten bestimmt hat.

§. 261.

II. Es soll eine unzugängliche krumme Linie aufgenommen werden.

Aufl. und Bew. (Fig. 147). Diese unzugängliche krumme Linie bilde z. B. das jenseitige Ufer eines Flusses. Man wähle sich zwey etwas erhöhte Standpunkte A u. B, stelle den Meßtisch über B, visire nach A, C, D, E, F, G und H als die merklichsten Punkte der krummen Linie, messe AB und trage die Größe davon auf. Sodann setze man den Tisch über A so, daß ab in die Richtung von AB fällt, und visire nach C, D, E, F, G u. H, so bezeichnen die Durchschnittspunkte c, d, e, f, g u. h je zwey nach einem Punkte der Krümmung gezogener Visirlinien die Punkte C, D, E, F, G u. H, und zieht man durch dieselben eine, mit der gegebenen Linie am Felde möglichst ähnliche krumme Linie, so stellt letztere die erstere dar; denn die einander entsprechenden Dreyecke sind einander ähnlich, also sind die Punkte c, d, e, f, g u. h bestimmt und den Punkten C, D, E, F, G und H vollkommen entsprechend.

Zusatz: Je mehr man auf diese Art Punkte bestimmt (welches man das Abschneiden nennt), desto richtiger wird die Aufnahme.

§. 262.

d) Die Aufnahme von Flächen.

Aufgaben.

I. Man soll eine am Felde markirte, geradlinige Figur (Fig. 148) in Grundriß legen, wenn man von einem Punkte M aus innerhalb nach allen Winkeln visiren und messen kann.

Aufl. und Bew. Man bringe den Meßtisch über M, visire nach A, B, C, D, E, F, messe die Linien MA, MB, MC, MD, ME, MF und trage die Größen derselben auf den entsprechenden Visirlinien auf, so ist, wenn man die Linien ab, bc, cd, de, ef und fa zieht, abcdefa der verlangte Grundriß. Denn ABM ∽ △ abm, △ BCM ∽ △ bcm etc. (§. 61), folglich

$$\begin{array}{rl} & ABM = abm \text{ und} \\ & CBM = cbm \\ \hline \text{woraus} & ABM + CBM = abm + cbm \text{ d. h.} \\ & ABC = abc. \end{array}$$

Auf dieselbe Art erhält man auch die Gleichheit der anderen Winkel. Ferners ist ab proportionirt mit AB, ebenso auch bc mit BC etc. (§. 60, Zus. 5); mithin ist abcdefa ∽ ABCDEFA (§. 91).

§. 263.

II. Es sey eine Figur in Grund zu legen, wenn man von zwey Punkten innerhalb aus wohl nach allen Winkeln visiren, aber nicht messen kann.

Aufl. und Bew. (Fig. 149). Die aufzunehmende Figur sey ABCDEA und F u. G seyen die zwey Punkte innerhalb derselben, von welchen aus nach allen Winkeln wohl visirt, aber nicht gemessen werden kann. Man nehme FG als Standlinie an, messe sie und trage sie gleich fg auf. Nun setze man den Meßtisch über F und ziehe die Visirlinien nach den Winkeln der Figur; sodann stelle man den Meßtisch mit der Visirlinie fg in der Richtung von FG in G auf, und verfahre von diesem Punkte aus eben so, so erhält man in der Figur abcdea den verlangten Grundriß; denn ef ist proportionirt mit EF und de mit DE (§. 259) und efd = EFD, folglich △ efd ∽ △ EFD (§. 61), und da ebenso auch △ dcf ∽ △ DCF, △ cfb ∽ △ CFB etc., so ist auch abcdea ∽ ABCDEA.

§. 264.

III. Es soll ein am Felde abgestecktes Viereck ABCD (Fig. 150) von einem Winkel A aus in Grundriß gelegt werden.

Aufl. und Bew. Man messe alle Seiten, bringe den Tisch über A und ziehe nach den Punkten B u. D Visirlinien. Dann trage man ab = AB und ad = AD auf, nehme bc = BC und cd = CD und beschreibe mit den letzteren zwey Linien aus b und d Kreisbögen, so werden sich selbe in c schneiden und abcd die verlangte Figur vorstellen (§. 71, Zus. 5).

Zusatz: Sind Gegenstände vorhanden, welche das Messen der Linien AD, CD und BC hindern, so verrichte man die Aufnahme von zwey Punkten A und B aus eben so, wie in §. 263, indem man AB als Standlinie annimmt.

§. 265.

IV. Es sey ein auf dem Felde ausgestecktes Polygon ABCDEA (Fig. 151) von zwey Winkeln A und B aus in Grund zu legen, wenn man die Figur nicht umgehen, wohl aber von A und B aus nach allen andern Winkeln visiren kann.

Aufl. und Bew. Man nehme AB als Standlinie, und verfahre eben so wie in §. 263, so erhält man abcdea als den verlangten Grundriß. Der Beweis hierfür ist derselbe, wie in dem erwähnten §.

Zusätze:

1) Können von den Punkten A u. B aus die übrigen Winkel nicht alle gesehen werden, so visire man zuerst von A aus nach allen jenen Winkeln wo es möglich ist, und thue dieß darauf auch in B und in

so vielen Scheitelpunkten der Figur als durch ein Abschneiden nothwendig ist, um den verlangten Grundriß, wie bekannt, zu erhalten.

2) Kann man von einem Winkel aus nur immer nach den zwey zunächstliegenden am Umfange der Figur sehen, so stelle man zuerst den Meßtisch in A auf und visire nach B und E, dann in B mit der Visirlinie ab in der Richtung von AB und visire nach C, hiernach ebenso in C mit der Visirlinie bc in der Richtung von BC u. s. w. Die Seiten der Figur messe man, ausgenommen der zwey letzten, und trage sie auf den erhaltenden Visirlinien auf, so bekömmt man schon beym vorletzten Winkel D den ganzen Grundriß.

§. 266.

Anmerkung.

Um mit Hülfe eines Meßtisches eine krummlinige Figur in Grund zu legen, verfahre man auf die in §. 253 und 254 angeführte Weise, mit Berücksichtigung alles dessen, was bisher bey Aufnahmen mit dem Meßtische erwähnt wurde.

Zusammenstellung
von
Formeln zur Lösung geometrischer Aufgaben.

Gesuchte Stücke.	Gegebene Stücke.	Formeln.
Die Hypth. a eines rechtw. Dreyeckes.	Die 2 Katheten b, c.	$a = \sqrt{(b^2 + c^2)}$.
△ ABC.	Die Grundlinie b und die Höhe h.	$\triangle ABC = \frac{b \cdot h}{2}$.
	Die 3 Seiten a, b, c.	$\triangle ABC = \frac{1}{4}\sqrt{[(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)]}$.
Das Quadr. AC.	Eine Seite a.	Quadr. $AC = a^2$.
	Die Diagonale d.	Quadr. $AC = \frac{d^2}{2}$.
Das Parallelogr. AC.	Die Grundlinie b und die Höhe h.	Parallgr. $AC = b \cdot h$.
	Eine Seite a und die Diagonale d.	Parallgr. $AC = a\sqrt{(d^2 - a^2)}$.
Das Trapez. MN.	Die 2 parallelen Seiten a, b und die Höhe h.	Trap. $MN = \frac{(a + b)\,h}{2}$.

Gesuchte Stücke.	Gegebene Stücke.	Formeln.
Die Summe S aller Winkel in einem Polygone.	Die Seitenzahl n des Polygons.	$S = (n - 2)\ 2R.$
Der Winkel α eines reg. Polygons.	Die Seitenzahl n des Polygons.	$\alpha = \left(2 - \frac{4}{n}\right) R.$
Das reg. Polygon P	Der Perimeter m, und der senkrechte Abstand a einer Seite vom Polygonmittelpunkte.	$P = \frac{m\ .\ a}{2}.$
Die Peripherie p eines Kreises.	Der Diameter d.	$p = d\pi$ *).
	Der Radius r.	$p = 2r\pi.$
Die Länge α eines Bogens von n°.	Die Gradanzahl des Bogens n, und der Radius r des Kreises.	$\alpha = 2r\pi \times \frac{n^\circ}{360^\circ}.$
Die Seite a eines regul. Polyg. im Kreise.	Der Rad. r, und die Seite b des reg. Polygons um den Kreis.	$a = \frac{2br \sqrt{(4r^2 + b^2)}}{4r^2 + b^2}.$
Die Seite a eines regul. Dreyeckes im Kreise.		$a = r \sqrt{3}.$

Die Seite b eines regul. Dreyeckes um den Kreis.	Der Radius r.	$b = 2r\sqrt{3}$.
Die Seite a eines Quadrats im Kreise.	Der Radius r.	$a = r\sqrt{2}$.
Die Seite b eines Quadrats um den Kreis.	Der Radius r.	$b = 2r$.
Der Radius r des um ein Dreyeck beschrieb. Kreises.	Die 3 Seiten a, b, c des Dreyeckes.	$r = \frac{abc}{\sqrt{[(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)]}}$.
Der Radius r des in ein Dreyeck beschr. Kreises.	Die 3 Seiten a, b, c des Dreyeckes.	$r = \frac{\sqrt{[(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)]}}{2(a+b+c)}$.
Die Seite z eines regul. Polygons.	Die Seite a eines andern regul. Polyg. von der Hälfte Seitenzahl.	$z = \sqrt{\left\{2r\left[r - \frac{1}{2}\sqrt{(2r+a)(2r-a)}\right]\right\}}$.
Der Kreis K.	Der Radius r.	$K = r^2\pi$.

*) $\pi = 3{,}1415926.....$

Gesuchte Stücke.	Gegebene Stücke.	Formeln.
Der Kreissector M.	Der Radius r, und die Gradanzahl n des Bogens.	$M = r^2\pi \times \frac{n^\circ}{360^\circ}$.
	Der Radius r, und die Länge α des Bogens.	$M = \frac{\alpha r}{2}$.
Das Kreissegment N.	Der Radius r, und die Gradanzahl n des Bogens.	$N = \frac{r^2\pi . n^\circ - a\sqrt{[(2r+a)(2r-a)]} . 90^\circ}{360^\circ}$.
Die Oberfläche O eines Tetraëdrons.	Eine Kante a.	$O = a^2 \sqrt{3}$.
Die Oberfläche O eines Hexaëdrons.	Eine Kante a.	$O = 6a^2$.
Die Oberfläche O eines senkrechten Cylinders.	Der Radius r der Grundfl. und die Höhe h.	$O = 2r\pi\ (r + h)$.
Die Oberfläche O eines senkrechten Kegels.	Der Radius r der Grundfl. und die Seite a des Kegels.	$O = r\pi\ (r + a)$.
	Der Radius r der Grundfl. und die Höhe h des Kegels.	$O = r\pi\ (r + \sqrt{h^2 + r^2})$.

Die Oberfläche O eines senkrechten abgekürzten Kegels.	Die Rad. R u. r der 2 parall. Kreisebenen und die Seite a des abgek. Kegels.	$O = \pi\,[(R + r)\,a + (R^2 + r^2)]$.
Die Oberfl. O einer Kugel.	Der Radius r.	$O = 4r^2\pi$.
Die krumme Oberfläche O einer Zone.	Der Radius r der Kugel und die Höhe h der Zone.	$O = 2r\pi h$.
Die krumme Oberfl. O eines Kugelsegments.	Der Rad. r der Kugel und die Höhe h des Segments.	$O = 2r\pi h$.
Die ganze Oberfl. O eines Kugelsegmts.	Der Diameter d der Kugel und die Höhe h des Segmts.	$O = h\pi\,(2d - h)$.
Die ganze Oberfl. O eines Kugelsectors.	Der Rad. r der Kugel und die Höhe h des dazu gehörigen Segments.	$O = 2r\pi\,[h + \frac{1}{2}\sqrt{h\,(2r - h)}]$.
Die Oberfl. O eines Oktaëdrons.	Eine Kante a.	$O = 2a^2\sqrt{3}$.
Die Oberfl. O eines Ikosaëdrons.	Eine Kante a.	$O = 5a^2\sqrt{3}$.
Die Oberfl. O eines Dodekaëdrons.	Eine Kante a.	$O = 15a^2\sqrt{(1 + 2\sqrt{\frac{1}{5}})}$.

Gesuchte Stücke.	Gegebene Stücke.	Formeln.
Der Inhalt I eines Prismas.	Die Grundfl. B unt die Höhe H.	$I = B \, . \, H.$
Der Inhalt I eines Hexaëdrons.	Eine Kante a.	$I = a^3.$
Der Inhalt I eines Cylinders.	Der Radius r der Grundfl. und die Höhe h	$I = r^2 \pi h.$
Der Inhalt I einer Pyramide.	Die Grundfl. B und die Höhe H.	$I = \frac{B \, . \, H}{3}.$
Der Inhalt I eines Tetraëdrons.	Eine Kante a.	$I = \frac{1}{12} a^3 \sqrt{2}.$
Der Inhalt I einer abgekürzten Pyramide.	Die 2 Parallelebenen B, b und die Höhe h.	$I = \frac{1}{3} h (B + b + \sqrt{Bb}).$
Der Inhalt I eines Kegels.	Der Radius r der Grundfl. und die Höhe h.	$I = \frac{1}{3} r^2 \pi h.$
Der Inhalt I eines abgekürzten Kegels.	Die Radien R, r beyder Parallelebenen und die Höhe h.	$I = \frac{1}{3} h\pi (R^2 + r^2 + Rr).$
Der Inhalt I einer Kugel.	Der Radius r.	$I = \frac{4}{3} r^3 \pi.$

Der Inhalt I eines Kugelsegments.	Der Radius r der Kugel und die Höhe h des Segments.	$I = h^2\pi (r - \frac{1}{3}h)$.
Der Inhalt I eines Kugelsectors.	Der Rad. r der Kugel und die Höhe h des dazu gehörigen Segments.	$I = \frac{2}{3} r^2\pi h$.
Der Inhalt I eines Oktaëdrons.	Eine Kante a.	$I = \frac{1}{3} a^3 \sqrt{2}$.
Der Inhalt I eines Ikosaëdrons.	Eine Kante a.	$I = \frac{5}{12} a^3 (3 + \sqrt{5})$.
Der Inhalt I eines Dodekaëdrons.	Eine Kante a.	$I = \frac{1}{4} a^3 (15 + 7 \sqrt{5})$.

Berichtigungen.

Seite	11	Zeile	12	statt:	Schenkeltheile	lies:	Schenkel Theile.
„	12	„	26	„	spitzen	„	spitzer.
„	13	„	26	„	zweyer	„	zweyen.
„	30	„	17	„	spitze	„	spitzen.
„	68	„	17	„	AG	„	FG
„	108	„	18	„	Die Prisma	„	Das Prisma.
„	116	„	15	„	$x=y=m=$	„	$y=x=m=$
„	150	„	9	„	$GH=HL=KL=GK$	„	$GH=HK=KL=GL$
„	—	„	15	„	$AE \backsim GL$	„	$AE \backsim GK$
„	—	„	17	„	$AE : GL=$	„	$AE : GK=$
„	154	„	27	„	Fig. 95.	„	Fig. 121.

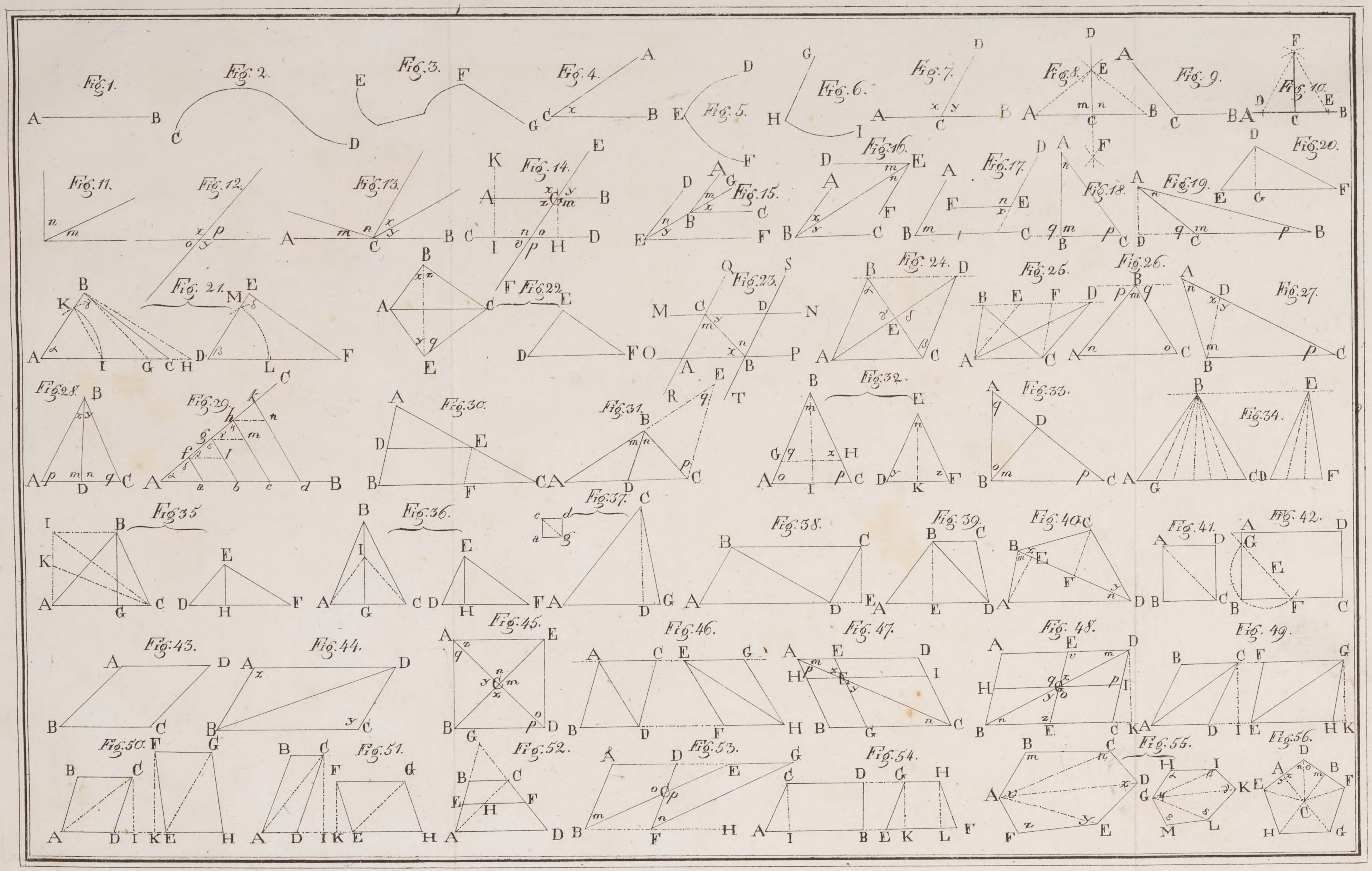
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 35
Fig. 36.
Fig. 37.
Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 41.
Fig. 42.
Fig. 43.
Fig. 44.
Fig. 45.
Fig. 46.
Fig. 47.
Fig. 48.
Fig. 49.
Fig. 50.
Fig. 51.
Fig. 52.
Fig. 53.
Fig. 54.
Fig. 55.
Fig. 56.

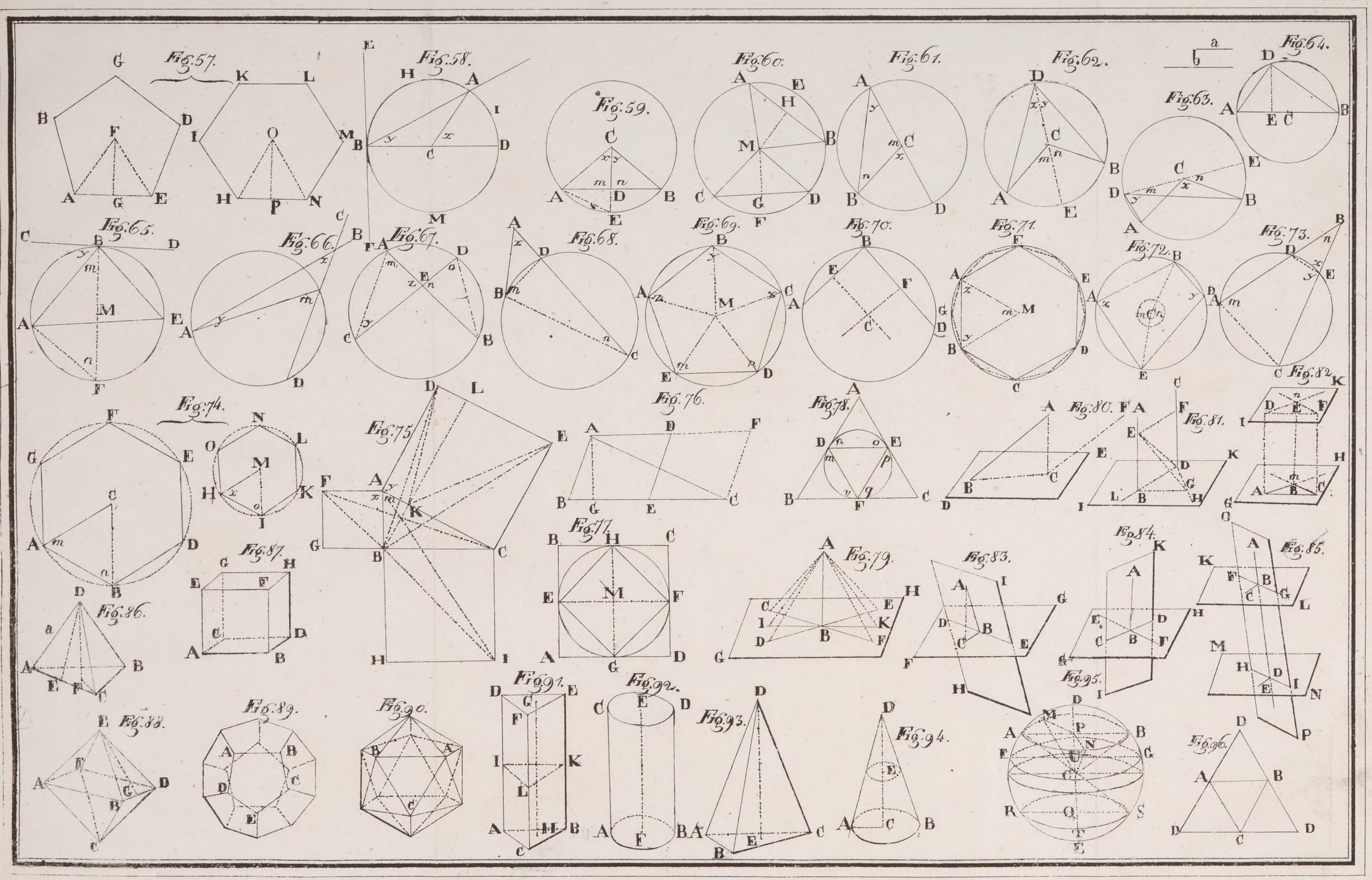
Fig. 57.
Fig. 58.
Fig. 59.
Fig. 60.
Fig. 61.
Fig. 62.
Fig. 63.
Fig. 64.
Fig. 65.
Fig. 66.
Fig. 67.
Fig. 68.
Fig. 69.
Fig. 70.
Fig. 71.
Fig. 72.
Fig. 73.
Fig. 74.
Fig. 75.
Fig. 76.
Fig. 77.
Fig. 78.
Fig. 79.
Fig. 80.
Fig. 81.
Fig. 82.
Fig. 83.
Fig. 84.
Fig. 85.
Fig. 86.
Fig. 87.
Fig. 88.
Fig. 89.
Fig. 90.
Fig. 91.
Fig. 92.
Fig. 93.
Fig. 94.
Fig. 95.
Fig. 96.

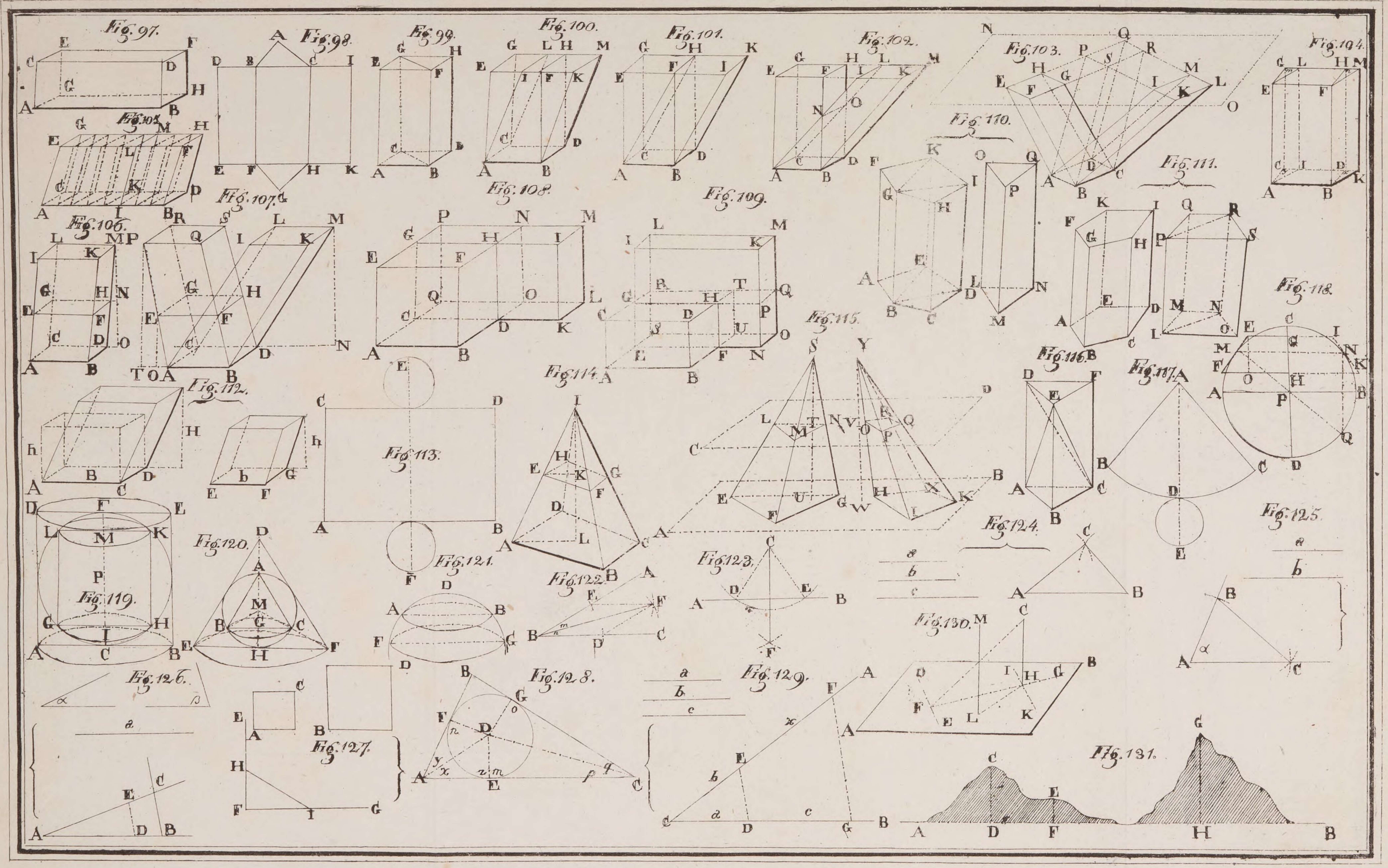
Fig. 97.
Fig. 98.
Fig. 99.
Fig. 100.
Fig. 101.
Fig. 102.
Fig. 103.
Fig. 104.
Fig. 105.
Fig. 106.
Fig. 107.
Fig. 108.
Fig. 109.
Fig. 110.
Fig. 111.
Fig. 112.
Fig. 113.
Fig. 114.
Fig. 115.
Fig. 116.
Fig. 117.
Fig. 118.
Fig. 119.
Fig. 120.
Fig. 121.
Fig. 122.
Fig. 123.
Fig. 124.
Fig. 125.
Fig. 126.
Fig. 127.
Fig. 128.
Fig. 129.
Fig. 130.
Fig. 131.

Tafel IV.

Fig. 132.
Fig. 133.
Fig. 134.
Fig. 135.
Fig. 136.
Fig. 137.
Fig. 138.
Fig. 139.
Fig. 140.
Fig. 141.
Fig. 142.
Fig. 143.
Fig. 144.
Fig. 145.
Fig. 146.
Fig. 147.
Fig. 148.
Fig. 149.
Fig. 150.
Fig. 151.

Bayerische StaatsBibliothek

Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Schmölzl, Josef

Die reine und angewandte Elementar-Mathematik ein vollstaendiges Lehrbuch zum Selbstunterrichte und zum Gebrauche bey Vorlesungen in Civil- und Militaerschulen
Bd.: 2

1831

Bamberg, Staatsbibliothek -- Ma.o.47(2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11739668-1